Blatt 11.4: Deltafunktion und Fourierreihen

Ausgabe: Freitag, 08.01.16 Abgabe: Freitag, 15.01.16, 13:00 Zentralübung: 27.01.16
(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Beispielaufgaben: {T}: wird im Tutorien besprochen; {S}: Selbststudium.

Beispielaufgabe 1: Integrale mit δ-Funktion [3]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[0.5](E); (c)[1](M); (d)[1](M). [T]

Berechnen Sie folgende Integrale (mit $a \in \mathbb{R}$):

(a) $I_1(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x-\pi)\sin(ax)$

(b) $I_2(a) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3x\, \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\mathbf{x}^2\,, \quad \text{mit} \quad \mathbf{y} = (a,1,2)^T$

(c) $I_3(a) = \int_0^a \mathrm{d}x\, \delta(x-\pi)\dfrac{1}{a+\cos^2(x/2)}$

(d) $I_4(a) = \int_0^3 \mathrm{d}x\, \delta(x^2-6x+8)\sqrt{\mathrm{e}^{ax}}$

[Kontrollergebnisse: $I_1(\frac{1}{2}) = 1$, $I_2(1) = 6$, $I_3(\pi) = \frac{1}{2\pi}$, $I_4(\ln 2) = 1$.]

Beispielaufgabe 2: Lorentz-Darstellung der Dirac-delta-Funktion [4]
Punkte: [4](M). [T]

Zeigen Sie, dass die untenstehende Lorentz-Peakfunktion $\delta^{[\epsilon]}(x)$ im Limes $\epsilon \to 0^+$ eine Darstellung der Dirac-delta-Funktion $\delta(x)$ liefert. Berechnen Sie dazu (i) die Höhe, (ii) die Breite x_b (definiert durch $\delta^{[\epsilon]}(x_\mathrm{b}) = \frac{1}{2}\delta^{[\epsilon]}(0)$, $x_\mathrm{b} > 0$) und (iii) das Gewicht des Lorentz-Peaks. Berechnen Sie ferner die Funktionen (iv) $\theta^{[\epsilon]}(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}x' \delta^{[\epsilon]}(x')$ und (v) $\delta'^{[\epsilon]}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta^{[\epsilon]}(x)$. Skizzieren Sie jeweils die drei Funktionen $\theta^{[\epsilon]}$, $\delta^{[\epsilon]}$, $\delta'^{[\epsilon]}$ (untereinander, mit gleich skalierten x-Achsen).

Lorentz-Peak: $\delta^{[\epsilon]}(x) = \dfrac{\epsilon/\pi}{x^2+\epsilon^2}\,.$

Hinweis: Zur Berechnung des Gewichts empfiehlt sich die Substitution $x = \epsilon \tan y$.
Anmerkung: Lorentz-Peaks kommen in der Physik oft vor. Beispiel: das Energiespektrum eines diskreten Quantenzustands, der schwach an eine Umgebung gekoppelt ist, hat die Form eines Lorentz-Peaks, dessen Breite durch die Kopplungsstärke an die Umgebung bestimmt wird. Geht die Kopplungsstärke nach Null, ergibt sich ein δ-Peak.

Beispielaufgabe 3: Reihendarstellung der $\coth$-Funktion [1]
Punkte: [1](E). [S]

Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-y|n|}$, mit $0 < y \in \mathbb{R}$, sich zur $\coth$-Funktion summiert.

Beispielaufgabe 4: Fourier-Reihe der Sägezahnfunktion [2]
Punkte: [2](M). [T]

$f(x)$ sei eine Sägezahnfunktion, gegeben durch $f(x) = x$ für $-\pi < x < \pi$, $f(\pm\pi) = 0$ und $f(x + 2\pi) = f(x)$. Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten $\tilde{f}_n$ in der Darstellung $f(x) = \frac{1}{L}\sum_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n x}\tilde{f}_n$. Wie sind k_n und L zu wählen? Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$, sowie die Summe der $n = 1$ und $n = -1$ Terme der Fourier-Reihe (d.h. der erste Term der entsprechenden Sinus-Reihe). [Kontrollergebnis: $\tilde{f}_6 = \frac{1}{3}\mathrm{i}\pi$.]

Beispielaufgabe 5: Cosinus-Reihen [4]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[2](M). [T]

Die Funktion $f : I \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x)$, mit $I = [-L/2, L/2]$ habe die Fourier-Reihendarstellung $f(x) = \frac{1}{L}\sum_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\tilde{f}_k$, mit $k = \frac{2\pi n}{L}$ und $n \in \mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Fourier-Koeffizienten gegeben sind durch $\tilde{f}_k = \int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x)$.

(b) Sei nun f eine gerade Funktion, d.h. $f(x) = f(-x)$. Zeigen Sie, dass dann die Fourier-Koeffizienten durch $\tilde{f}_k = 2\int_0^{L/2} \mathrm{d}x\, \cos(kx) f(x)$ gegeben sind, und ferner, dass $f(x)$ durch eine Cosinus-Reihe der Form $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k>0} a_k \cos(kx)$ dargestellt werden kann, mit $k = \frac{2\pi n}{L}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Wie lautet a_k, ausgedrückt durch $\tilde{f}_k$?

(c) Betrachten Sie nun folgende Funktion: $f(x) = 1$ für $|x| < L/4$, $f(x) = -1$ für $L/4 < |x| < L/2$. Skizzieren Sie diese und berechnen Sie die Koeffizienten $\tilde{f}_k$ und a_k der entsprechenden Fourier- und Cosinus-Reihen.

Beispielaufgabe 6: Parseval-Identität und Faltung [7]
Punkte: (a)[3](M); (b)[2](M); (c)[2](M). [T]

$f(x)$ sei eine Sägezahnfunktion, definiert durch $f(x) = x$ für $-\pi < x < \pi$, $f(\pm\pi) = 0$ und $f(x + 2\pi) = f(x)$. In der Fourier-Darstellung $f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\tilde{f}_n$ lauten die Fourier-Koeffizienten $\tilde{f}_n = 2\pi\mathrm{i}(-1)^n/n$ [siehe Beispielaufgabe 4]. Sei $g(x) = \sin x$.

(a) Überprüfen Sie an diesem konkreten Beispiel, dass die Parseval-Identität gilt, indem Sie sowohl das Integral $\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \overline{f}(x)\, g(x)$ als auch die Summe $(1/2\pi)\sum_n \overline{\tilde{f}}_n\, \tilde{g}_n$ explizit berechnen.

(b) Beweisen Sie die berühmte Identität $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, indem Sie das Integral $\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x f^2(x)$ einerseits direkt berechnen und andererseits mittels der Parseval-Identität durch eine Summe über Fourier-Moden ausdrücken.

(c) Berechnen Sie die Faltung $(f * g)(x)$ sowohl durch direkte Berechnung des Faltungsintegrals als auch mittels des Faltungstheorems und der Summation von Fourier-Koeffizienten.

[Gesamtpunktzahl Beispielaufgaben: 21]

Hausaufgabe 1: Integrale mit δ-Funktion [4]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[0.5](E); (c)[1](M); (d)[1](M); (e)[1](A).

Berechnen Sie folgende Integrale (mit $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$):

(a) $I_1(a) = \int_1^4 \mathrm{d}x\, \delta(x-2)\,(a^x + 3)$

(b) $I_2(a) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}^2x\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\,(x_1 + x_2)^2\, \mathrm{e}^{3-x_1}\,, \quad$ mit $\quad \mathbf{y} = (3, a)^T$

(c) $I_3(a) = \int_{-1}^1 \mathrm{d}x\, \sqrt{2+2x}\; \delta(ax - 2)\,, \quad$ mit $\quad a \neq 0$

(d) $I_4(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta(3^{-x} - 9)(1 - x^a)$

(e) $I_5(n) = \int_{-\pi/2}^{9\pi/2} \mathrm{d}x\, \cos(nx)\; \delta\,(\sin x)$

[Kontrollergebnisse: $I_1(3) = 12$, $I_2(-5) = 4$, $I_3(2) = \frac{1}{2}$, $I_4(3) = \frac{1}{\ln 3}$, $I_5(7) = 1$.]

Hausaufgabe 2: Darstellungen der Dirac-delta-Funktion [4]
Punkte: [4](M).

Zeigen Sie, dass die untenstehende Funktion $\delta^{[\epsilon]}(x)$ im Limes $\epsilon \to 0^+$ eine Darstellung der Dirac-delta-Funktion $\delta(x)$ liefert. Berechnen Sie dazu (i) die Höhe, (ii) die Breite x_b (definiert durch $\delta^{[\epsilon]}(x_\mathrm{b}) = \frac{1}{2}\delta^{[\epsilon]}(0)$, $x_\mathrm{b} > 0$) und (iii) das Gewicht des Peaks. Berechnen Sie ferner die Funktionen (iv) $\theta^{[\epsilon]}(x) = \int_{-\infty}^x \mathrm{d}x' \delta^{[\epsilon]}(x')$ und (v) $\delta'^{[\epsilon]}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta^{[\epsilon]}(x)$. Skizzieren Sie die drei Funktionen $\theta^{[\epsilon]}$, $\delta^{[\epsilon]}$, $\delta'^{[\epsilon]}$ (untereinander, mit gleich skalierten x-Achsen).

Gauß-Peak: $\quad \delta^{[\epsilon]}(x) = \dfrac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-(x/\epsilon)^2}\,.$

Hinweis: Die Funktion $\theta^{[\epsilon]}(x)$ läßt sich nicht elementar berechnen; drücken Sie sie stattdessen aus durch die 'Error-Funktion', $\mathrm{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{d}y\, \mathrm{e}^{-y^2}$, mit $\mathrm{Erf}(\infty) = 1$.
Anmerkung: Gauß-Peaks kommen in der Physik oft vor. Beispiel: Ein quantenmechanischer harmonischer Oszillator mit Federkonstante k und Potential $\frac{1}{2}kx^2$ hat eine Grundzustandswellenfunktion in Form eines Gauß-Peaks, mit Breite $\sim 1/\sqrt{k}$.

Hausaufgabe 3: Reihendarstellung der periodischen δ-Funktion [5]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[0.5](M); (c)[1.5](A); (d)[0.5](E); (e)[1](A); (f)[0.5](E); (g)[0.5](E)

Zeigen Sie, dass die Funktion $\delta^{[\epsilon]}(x)$, definiert durch

$$\delta^{[\epsilon]}(x) = \frac{1}{L} \sum_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx - \epsilon|k|}\,, \quad k = 2\pi n/L, \quad n \in \mathbb{Z}\,, \quad x, \epsilon, L \in \mathbb{R}\,, \quad 0 < \epsilon \ll L\,, \tag{1}$$

folgende Eigenschaften hat:

(a) $\delta^{[\epsilon]}(x) = \delta^{[\epsilon]}(x + L)\,. \quad (2)$

(b) $\int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x\, \delta^{[\epsilon]}(x) = 1\,.$ $\quad$ *Hinweis:* $k = 0$ und $k \neq 0$ getrennt behandeln in $\sum_k$. $\quad (3)$

(c) $\delta^{[\epsilon]}(x) = \dfrac{1}{2L}\left[\dfrac{1+w}{1-w} + \dfrac{1+\overline{w}}{1-\overline{w}}\right] = \dfrac{1}{L}\dfrac{1 - \mathrm{e}^{-4\pi\epsilon/L}}{1 + \mathrm{e}^{-4\pi\epsilon/L} - 2\mathrm{e}^{-2\pi\epsilon/L}\cos(2\pi x/L)}\,, \quad (4)$

wobei $w = \mathrm{e}^{2\pi(\mathrm{i}x-\epsilon)/L}$ und $\overline{w} = \mathrm{e}^{2\pi(-\mathrm{i}x-\epsilon)/L}$.
Hinweis: Drücken Sie hierfür die Summe in Gl. (1) durch geometrische Reihen in Potenzen von w und $\overline{w}$ aus.

(d) $\lim_{\epsilon\to 0} \delta^{[\epsilon]}(x) = 0$ für $x \neq mL$, mit $m \in \mathbb{Z}$. *Hinweis:* Gehen Sie von Gl. (4) aus. (5)

(e) $\delta^{[\epsilon]}(x) \simeq \dfrac{\epsilon/\pi}{\epsilon^2 + x^2}$ für $|x|/L \ll 1$ und $\epsilon/L \ll 1$. (6)

Hinweis: Taylor-entwickeln Sie hierfür den Zähler in Gl. (4) bis zur 1. Ordnung in $\tilde{\epsilon} = 2\pi\epsilon/L$, und den Nenner bis zur 2. Ordnung in $\tilde{\epsilon}$ und $\tilde{x} = 2\pi x/L$.

(f) Skizzieren Sie die Funktion $\delta^{[\epsilon]}(x)$ qualitativ für $\epsilon/L \ll 1$ und $x \in [-\frac{7}{2}L, \frac{7}{2}L]$.

(g) Folgern Sie, dass $\delta^{[\epsilon]}(x)$ im Limes $\epsilon \to 0$ eine periodische δ-Funktion darstellt, mit

$$\delta^{[0]}(x) = \frac{1}{L}\sum_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta(x - mL) \ . \qquad (7)$$

Hausaufgabe 4: Fourier-Reihen [4]
Punkte: (a)[2](E); (b)[2](M)

Bestimmen Sie die Fourier-Reihen für folgende periodische Funktionen, d. h. berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten $\tilde{f}_n$ in der Darstellung $f(x) = \frac{1}{L}\sum_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n x}\tilde{f}_n$. Wie sind k_n und L jeweils zu wählen? Skizzieren Sie zunächst die Funktionen.

(a) $f(x) = |\sin x|$, (b) $f(x) = \begin{cases} 4x & \text{für} \quad -\pi \le x < 0\,, \\ 2x & \text{für} \quad 0 \le x < \pi\,, \end{cases}$ und $f(x + 2\pi) = f(x)$.

[Kontrollergebnisse: (a) $\tilde{f}_3 = -\frac{2}{35}$, (b) $\tilde{f}_3 = \frac{2}{9}(2 - 9\mathrm{i}\pi)$.]

Hausaufgabe 5: Sinus-Reihen [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[2](M)

Die Funktion $f : I \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x)$, mit $I = [-L/2, L/2]$ habe die Fourier-Reihendarstellung $f(x) = \frac{1}{L}\sum_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\tilde{f}_k$, mit $k = \frac{2\pi n}{L}$ und $n \in \mathbb{Z}$, mit Fourier-Koeffizienten $\tilde{f}_k = \int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x)$.

(a) Sei nun f eine ungerade Funktion, d.h. $f(x) = -f(-x)$. Zeigen Sie, dass dann die Fourier-Koeffizienten durch $\tilde{f}_k = -\mathrm{i}2\int_0^{L/2} \mathrm{d}x\, \sin(kx) f(x)$ gegeben sind, und ferner, dass $f(x)$ durch eine Sinus-Reihe der Form $f(x) = \sum_{k>0} b_k \sin(kx)$ dargestellt werden kann, mit $k = \frac{2\pi n}{L}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Wie lautet b_k, ausgedrückt durch $\tilde{f}_k$?

(b) Betrachten Sie nun folgende Funktion: $f(x) = 1$ für $0 < x < L/2$, $f(x) = -1$ für $-L/2 < x < 0$. Skizzieren Sie diese und berechnen Sie die Koeffizienten $\tilde{f}_k$ und b_k der entsprechenden Fourier- und Sinus-Reihen.

Hausaufgabe 6: Faltungstheorem [3]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[1](M); (c)[1.5](A)

Lernziel: Diese Aufgabe illustriert, wie sich eine komplizierte Summe mittels Faltungstheorem explizit berechnen lässt.
Betrachten Sie die Funktion $f_\gamma(t) = f_\gamma(0)\mathrm{e}^{\gamma t}$ für $t \in [0, \tau)$ und $f(t + \tau) = f(t)$ mit $f_\gamma(0) = 1/(\mathrm{e}^{\gamma\tau} - 1)$.

(a) Betrachten Sie eine Fourier-Reihendarstellung von $f_\gamma(t)$ mit folgender Form:

$$f_\gamma(t) = \frac{1}{\tau}\sum_{\omega_n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t}\tilde{f}_{\gamma,n}, \qquad \tilde{f}_{\gamma,n} = \int_0^\tau dt \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n t} f_\gamma(t), \quad \text{mit} \quad \omega_n = 2\pi n/\tau, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

Zeigen Sie, dass die Fourier-Koeffizienten durch $\tilde{f}_{\gamma,n} = 1/(\mathrm{i}\omega_n + \gamma)$ gegeben sind.

(b) Benutzen Sie dieses Ergebnis und das Faltungstheorem um folgende Reihe als Faltungsintegral von f_γ und $f_{-\gamma}$ auszudrücken:

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t}}{\omega_n^2 + \gamma^2} = -\tau \int_0^\tau dt' f_\gamma\left(t - t'\right) f_{-\gamma}\left(t'\right) . \tag{9}$$

(c) Skizzieren Sie die im Faltungsintegral (9) vorkommenden Funktionen $f_\gamma(t - t')$ und $f_{-\gamma}(t')$ als Funktionen von t', für $t' \in [-\tau, 2\tau]$. Zeigen Sie, für $0 \leq t \leq \tau$, dass das Faltungsintegral (9) durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$S(t) = \frac{\tau\left[\sinh\left(\gamma\left(t-\tau\right)\right) - \sinh\left(\gamma t\right)\right]}{2\gamma\left[1 - \cosh\left(\gamma\tau\right)\right]} .$$

Hinweis: Das Integral $\int_0^\tau \mathrm{d}t'$ enthält einen Bereich, in dem $t - t'$ außerhalb von $[0, \tau)$ liegt. Deswegen empfiehlt es sich, dass Integral in zwei Teile aufzuteilen, mit $\int_0^t \mathrm{d}t'$ und $\int_t^\tau \mathrm{d}t'$.

[Gesamtpunktzahl Hausaufgaben: 23]
