Prof. Jan von Delft, Übungen: Olga Goulko (O.Goulko@physik.uni-muenchen.de)
http://homepages.physik.uni-muenchen.de/~vondelft/Lehre/11t0/

Hauptklausur

Mittwoch, 22.02.2012

Name:

Matrikelnummer:

Studiengang:

- Jede Aufgabe ist auf *getrennten Blättern* zu lösen.
- Bitte versehen Sie jedes extra Blatt mit ihrem *Namen* und der *Nummer der darauf bearbeiteten Aufgabe.*
- Bitte auf allen Blättern oben links Platz zum Tackern lassen.
- Es sind *keine Hilfsmittel* erlaubt.
- Bearbeitungszeit: Bachelor: 180 min, Lehramt und Nebenfach: 120 min
- **Lehrämtler und Nebenfächler** sollen *beliebige* 8 aus den 12 Pflichtaufgaben bearbeiten. Aufgaben 3,4,5 und 10, mit $*$ gekennzeichnet, befassen sich mit Themen, die im Stoffplan als “nicht klausurrelevant” für Lehramt und Nebenfach angegeben sind. Wer will, kann dennoch eine (oder mehrere) dieser Aufgaben bearbeiten, und dafür eine (oder mehrere) der anderen Aufgaben auslassen. Diese Tauschregelung gilt jedoch nur für vollständige Aufgaben, nicht für Teilaufgaben.
- Aufgabe 13 ist optional, dort erworbene Punkte werden als Bonuspunkte gewertet.

Aufgabe	1	2	3*	4*	5*	6	7	8	9	10*	11	12	(Bonus: 13)	Summe
Punktzahl	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	(5)	60 (+5)
Erreichte Punktzahl														

Viel Erfolg!

Aufgabe 1. *Vektoralgebra und Vektoranalysis (5 Punkte)*

Betrachten Sie die reelle Funktion

$$f(x, y, z) = x^2 y + y^2 z$$

und das Vektorfeld

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} xyz \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\vec{\nabla} f$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ und $\vec{\nabla} \times \vec{v}$.

Aufgabe 2. *Wegintegral in kartesischen Koordinaten (5 Punkte)*

Sei $\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 \\ z \\ y \end{pmatrix}$ ein dreidimensionales Vektorfeld in kartesischen Koordinaten. Berechnen Sie das Wegintegral $\int_W \vec{F} \cdot d\vec{r}$ entlang des zusammengesetzten Weges $W = W_1 \cup W_2$, wobei W_1 die gerade Strecke zwischen den Punkten $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist, und W_2 die gerade Strecke zwischen den Punkten $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3. (*) *Matrixrechnung (5 Punkte)*

Gegeben ist die von der Variable x abhängige Matrix

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3-x & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie die Eigenwerte λ_j und die Eigenvektoren $\vec{v}_j$ von A, mit $j = 1, 2, 3$.

Hinweis 1: Einer der Eigenwerte ist $\lambda = x$. (Auch die anderen Ergebnisse können natürlich von x abhängen.)
Hinweis 2: Vermeiden Sie das vollständige Ausmultiplizieren des charakteristischen Polynoms $P_A(\lambda)$; versuchen Sie stattdessen, es direkt in eine vollständig faktorisierte Form zu bringen!

Aufgabe 4. (*) *Reihenentwicklung, Iteratives Lösen einer Gleichung (5 Punkte)*

Sei $y(x)$ eine reelle und analytische Funktion von x, die für $x \ll 1$ die Gleichung

$$e^{y(x)} = 1 + 2x - \frac{y(x)}{1-x}$$

erfüllt.

(a) Zeigen Sie, dass $y(0) = 0$ gilt.

(b) Lösen Sie die Gleichung für $y(x)$ iterativ mittels einer Reihenentwicklung der Form $y(x) = y_1 x + y_2 x^2 + \mathcal{O}(x^3)$, d.h., bestimmen Sie y_1 und y_2. (*Anmerkung:* Wegen $y(0) = 0$ enthält die Reihenentwicklung von $y(x)$ keinen konstanten Term.)

Aufgabe 5. (*) *Extrema unter Nebenbedingungen (5 Punkte)*

Finden Sie die Extrema der Funktion $g(x, y, z) = x + 2y - z$ unter den Nebenbedingungen $x^2 + y^2 = 8$ und $x + z = 6$.

Aufgabe 6. *Fourierreihen (5 Punkte)*

Betrachten Sie die periodische Funktion $x(t)$, definiert als $x(t) = t^3$ für $-\tau/2 < t < \tau/2$ und $x(t) = x(t+\tau)$ für beliebige t. Stellen Sie diese Funktion als Fourierreihe dar und berechnen Sie die entsprechenden Fourier-Koeffizienten.

Hinweis: Sie dürfen folgendes Integral verwenden:

$$\int t^3 \sin(\omega t) dt = \frac{1}{\omega^4} \big(3(t^2\omega^2 - 2)\sin(\omega t) - t\omega(t^2\omega^2 - 6)\cos(\omega t)\big) + \text{const.}$$

Aufgabe 7. *Volumenintegral (5 Punkte)*

Berechnen Sie in Zylinderkoordinaten das Volumenintegral

$$\int (x^2 + y^2)dV$$

über dem Kegel mit $0 \leq z \leq 2$ und $x^2 + y^2 \leq 2z$.

Hinweis: Machen Sie als Erstes eine Skizze des Kegels!

Aufgabe 8. *Flussintegral eines Vektorfeldes I: direkte Berechnung (5 Punkte)*

(a) Berechnen Sie die Rotation $\vec{\nabla} \times \vec{u}$ des Vektorfelds

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} y^2 \\ z^2 \\ x^2 \end{pmatrix} .$$

(b) Berechnen Sie in Kugelkoordinaten das Flächenintegral

$$\int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \cdot d\vec{A}$$

über die Oberfläche der Halbkugel $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$ mit Radius R, durch explizite Integration über die Fläche (d.h., ohne den Satz von Stokes zu verwenden).

Hinweis: Machen Sie als Erstes eine Skizze der Halbkugel!

Aufgabe 9. *Flussintegral eines Vektorfeldes II: Satz von Stokes (5 Punkte)*

Berechnen Sie nun für das Vektorfeld $\vec{u}$ aus Aufgabe 8 wieder das Integral

$$\int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \cdot d\vec{A},$$

über die Oberfläche der Halbkugel $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\; x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$ mit Radius R, diesmal indem Sie es mit dem Satz von Stokes in ein Kurvenintegral überführen und letzteres berechnen.

Aufgabe 10. (*) *Komplexe Analysis (5 Punkte)*

Berechnen Sie mit dem Residuensatz folgende Integrale,

$$\text{(a)} \quad \oint_{|z|=\pi} \frac{\sin z}{(z-\pi/2)(z-3\pi/2)} dz \quad \text{und} \quad \text{(b)} \quad \oint_{|z|=5} \frac{z}{z^2-9} dz.$$

Hinweis: Skizzieren Sie für jedes der Integrale zunächst den Integrationsweg und die Pole!

Aufgabe 11. *Differentialgleichungen I: kritisch gedämpfter harmonischer Oszillator (5 Punkte)*

Finden Sie die Lösung der linearen homogenen Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\Omega\dot{x} + \Omega^2 x = 0$$

für den kritisch gedämpften harmonischen Oszillator, mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 1$.

Aufgabe 12. *Differentialgleichungen II: Greensche Funktion (5 Punkte)*

(a) (2 Punkte) Betrachten Sei den kritisch gedämpften harmonischen Oszillator mit periodischem Antrieb,

$$\ddot{x} + 2\Omega\dot{x} + \Omega^2 x = q\sin(\omega_0 t).$$

Konstruieren Sie explizit eine partikuläre Lösung $x_p(t)$ durch Berechnung eines Integrals, das die Faltung der Greenschen Funktion $\mathcal{G}(t)$ und der Inhomogenität enthält, wobei $\mathcal{G}(t)$ wie folgt lautet:

$$\mathcal{G}(t) = \theta(t)te^{-\Omega t}, \qquad \text{wobei} \quad \theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad . \tag{1}$$

(b) (3 Punkte) Überprüfen Sie, dass $\mathcal{G}(t)$ tatsächlich die Greensche Funktion für den kritisch gedämpften harmonischen Oszillator ist, indem Sie (durch explizites Einsetzen) zeigen, dass $\mathcal{G}(t)$ folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\Omega\frac{d}{dt} + \Omega^2\right)\mathcal{G}(t) = \delta(t) \ . \tag{2}$$

Hinweis 1: Die Ableitung der θ-Funktion ist $\dot{\theta}(t) = \delta(t)$.
Hinweis 2: Für eine beliebige Funktion $f(t)$ gilt $\delta(t)f(t) = \delta(t)f(0)$. Falls also $f(t)$ die Eigenschaft $f(0) = 0$ hat, gilt somit $\delta(t)f(t) = 0$.

Aufgabe 13. (optional) *Greensche Funktion des kritisch gedämpften harmonischen Oszillators (5 Bonuspunkte)*

Die Greensche Funktion des kritisch gedämpften harmonischen Oszillators kann auch als folgendes Integral dargestellt werden:

$$\mathcal{G}(t) = \theta(t) t e^{-\Omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \underbrace{\left(-\frac{1}{2\pi}\right) \frac{e^{-i\omega t}}{(\omega + i\Omega)^2}}_{f(\omega)} .$$

Beweisen Sie diese Beziehung für $t \neq 0$ explizit, indem Sie das Integral als Wegintegral in der komplexen Zahlenebene berechnen. Behandelt Sie dazu die Fälle $t < 0$ und $t > 0$ separat.

Hinweis: Der Integrand hat im Komplexen einen Pol zweiter Ordnung bei $z_0 = -i\Omega$. Das entsprechende Residuum lässt sich mittels folgender Formel berechnen:

$$\mathrm{Res}(f(z), z) = \lim_{z \to z_0} \partial_z \left((z - z_0)^2 f(z) \right)$$