Prof. Jan von Delft, Übungen: Olga Goulko (O.Goulko@physik.uni-muenchen.de)
http://homepages.physik.uni-muenchen.de/~vondelft/Lehre/11t0/

Nachholklausur

Dienstag, 03.04.2012

Name:

Matrikelnummer:

Studiengang:

- Jede Aufgabe ist auf *getrennten Blättern* zu lösen.
- Bitte versehen Sie jedes extra Blatt mit ihrem *Namen* und der *Nummer der darauf bearbeiteten Aufgabe.*
- Achten Sie darauf, dass alle Blätter der Klausurangabe abgegeben werden. Fehlende Aufgaben werden mit null Punkten bewertet.
- Bitte auf allen Blättern oben links Platz zum Tackern lassen.
- Es sind *keine Hilfsmittel* erlaubt.
- Bearbeitungszeit: Bachelor: 180 min, Lehramt und Nebenfach: 120 min
- **Lehrämtler und Nebenfächler** sollen *beliebige* 8 aus den 12 Aufgaben bearbeiten. Aufgaben 3, 4, 5 und 9, mit $*$ gekennzeichnet, befassen sich mit Themen, die im Stoffplan als "nicht klausurrelevant" für Lehramt und Nebenfach angegeben sind. Wer will, kann dennoch eine (oder mehrere) dieser Aufgaben bearbeiten, und dafür eine (oder mehrere) der anderen Aufgaben auslassen. Diese Tauschregelung gilt jedoch nur für vollständige Aufgaben, nicht für Teilaufgaben.

Aufgabe	1	2	3*	4*	5*	6	7	8	9*	10	11	12	Summe
Punktzahl	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	60
Erreichte Punktzahl													

Viel Erfolg!

Aufgabe 1. *Vektoralgebra und Vektoranalysis (5 Punkte)*

Betrachten Sie die reelle Funktion

$$f(x, y, z) = xy^2z + 1$$

und das Vektorfeld

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} y \\ y^2 \\ x + y + z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\vec{\nabla} f$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ und $\vec{\nabla} \times \vec{v}$.

Aufgabe 2. *(5 Punkte)*

Sei

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ xy \end{pmatrix}.$$

ein Vektorfeld und $W = \{\vec{r}(\rho, \varphi, z);\ \rho = R,\ \varphi \in [0, 2\pi],\ z = \varphi/(2\pi)\}$ eine Schraubenlinie, gegeben in Zylinderkoordinaten, wobei R eine positive Konstante ist. Berechnen Sie das Wegintegral $\int_W \vec{F} \cdot d\vec{r}$ des Feldes $\vec{F}$ entlang der Schraubenlinie in Zylinderkoordinaten.

Hinweis: Da die Schraubenlinie durch die Variable φ parametrisiert ist, empfiehlt es sich, das Wegintegral zunächst als ein Integral über φ auszudrücken.

Aufgabe 3. (*) *Diagonalisieren einer Matrix (5 Punkte)*

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie die Eigenwerte λ_j und die Eigenvektoren $\vec{v}_j$ von A, mit $j = 1, 2, 3$.

Aufgabe 4. (*) *Invertieren einer Matrix (5 Punkte)*

Gegeben ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante dieser Matrix.

(b) Berechnen Sie das Inverse von B.

(c) Wie lautet die Definition einer orthogonalen Matrix (Drehmatrix)? Ist die Matrix B orthogonal?

Aufgabe 5. (*) *Reihenentwicklung, Iteratives Lösen einer Gleichung (5 Punkte)*

(a) Beweisen Sie unter Benutzung der bekannten Reihenentwicklungen für e^x und $\sin x$ (siehe Hinweis), dass folgende Entwicklung gilt:

$$e^{\sin(x^2+x)} = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + x^3 + \mathcal{O}(x^4) \tag{1}$$

Hinweis:

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \dots \\ e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots \end{aligned}$$

(b) Lösen Sie für kleine x die Gleichung

$$e^{\sin(x^2+x)} = y^2(x)$$

iterativ bis einschließlich zur Ordnung $\mathcal{O}(x^2)$, indem Sie den Ansatz $y(x) = y_0 + y_1 x + y_2 x^2 + \mathcal{O}(x^3)$, sowie Gl. (1) verwenden.

Aufgabe 6. *Fourierreihe (5 Punkte)*

Betrachten Sie die Sägezahnfunktion gegeben durch $f(x) = 2x$ im Intervall $-\pi < x < \pi$, $f(\pm\pi) = 0$ und $f(x + 2\pi) = f(x)$.

(a) Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten dieser Funktion und geben Sie die Fourierreihe an.

(b) Skizzieren Sie die Funktion und den ersten nichtverschwindenden Term der Fourierentwicklung.

Aufgabe 7. *Flussintegral eines Vektorfeldes I: direkte Berechnung (5 Punkte)*

Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Fluss

$$\Phi = \int_\Sigma \vec{u} \cdot d\vec{A}$$

dieses Vektorfeldes nach außen durch die Oberfläche der Kugel $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ mit Radius R direkt (d.h. ohne den Satz von Gauss zu verwenden).

Hinweis: Sie dürfen folgende Identitäten ohne Beweis verwenden:

$$\begin{aligned} \sin^4(\alpha) &= \frac{3 - 4\cos(2\alpha) + \cos(4\alpha)}{8}, \\ \cos^4(\alpha) &= \frac{3 + 4\cos(2\alpha) + \cos(4\alpha)}{8}, \\ \int_0^\pi d\alpha \sin^5(\alpha) &= \frac{16}{15}. \end{aligned}$$

Das Integral $\int d\alpha \sin\alpha \cos^n \alpha$ kann man mittels der Substitution $z = \cos\alpha$ lösen.

Aufgabe 8. *Flussintegral eines Vektorfeldes II: Satz von Gauss (5 Punkte)*

Berechnen Sie nun für das Vektorfeld $\vec{u}$ aus Aufgabe 7 wieder den Fluss

$$\Phi = \int_\Sigma \vec{u} \cdot d\vec{A}$$

nach außen durch die Oberfläche der Kugel $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ mit Radius R, diesmal indem Sie es mit dem Satz von Gauss in ein Volumenintegral überführen und letzteres berechnen.

Aufgabe 9. (*) *Komplexe Analysis (5 Punkte)*

Gegeben ist die komplexe Funktion

$$f(z) = \frac{z^2}{(4z-8)(z^2-3iz-2)}.$$

Geben Sie alle Polstellen dieser Funktion an. Berechnen Sie nun mit dem Residuensatz das Integral

$$\oint_\Gamma f(z)dz$$

entlang der geschlossenen Kontur Γ die aus den drei geraden Strecken $[-1, 5i]$, $[5i, 1]$ und $[1, -1]$ besteht und im Uhrzeigersinn verläuft. Machen Sie eine Skizze der Polstellen und der Kontur Γ.

Aufgabe 10. *Differentialgleichungen (5 Punkte)*

(a) Lösen Sie die Differentialgleichung $(t^2+4)\dot{x}(t) = tx(t)$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = 1$.

(b) Die Funktion $g(t)$ erfüllt die lineare Differentialgleichung $\dot{g}(t) = -g(t)+e^t$. Die Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung lautet $g_h(t) = Ce^{-t}$. Finden Sie davon ausgehend eine partikuläre Lösung $g_p(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung durch Variation der Konstanten und geben Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung unter der Anfangsbedingung $g(0) = 0$ an.

Aufgabe 11. *Differentialgleichungen: unterdämpfter harmonischer Oszillator (5 Punkte)*

Finden Sie die allgemeine Lösung der linearen homogenen Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega^2 x = 0$$

für den unterdämpften harmonischen Oszillator ($\gamma < \Omega$) mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 1$.

Aufgabe 12. *Eigenschaften der δ-Funktion (5 Punkte)*

Eine mögliche Darstellung der δ-Funktion lautet $\delta(x) = \lim_{a\to 0} \delta_a(x)$ mit

$$\delta_a(x) = C_a e^{-x^2/a^2}, \tag{2}$$

wobei C_a ein zu bestimmender, von a abhängiger Normierungsfaktor ist.

(a) Welchen Wert sollte das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx$ für eine korrekt normierte δ-Funktion haben? Bestimmen Sie nun den Normierungsfaktor C_a in Gl. (2) so, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x)dx$ diesen Wert hat.
Hinweis: Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

(b) Erläutern Sie anhand einer Skizze von $\delta_a(x)$ vs. x warum diese Funktion im Limes $a \to 0$ einer δ-Funktion entspricht.
Hinweis: Diskutieren Sie die Höhe und Breite des Peaks.

(c) Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \exp\left[\sin^3\left(\frac{\pi}{1-x}\right)\right] \delta(x), \\ I_2 &= \int_0^{\pi} dx \int_0^{\pi} dy \, \sin[y\sin(x)]\delta(x - \tfrac{\pi}{2}). \end{aligned}$$