T0: Rechenmethoden **WiSe 2011/12**

Prof. Jan von Delft, Übungen: Olga Goulko (`O.Goulko@physik.uni-muenchen.de`)
`http://homepages.physik.uni-muenchen.de/~vondelft/Lehre/11t0/`

Probeklausur

Donnerstag, 12.01.2012

Name:

Matrikelnummer:

- Jede Aufgabe ist auf *getrennten Blättern* zu lösen.
- Bitte versehen Sie jedes extra Blatt mit ihrem *Namen* und der *Nummer der darauf bearbeiteten Aufgabe.*
- Bitte auf allen Blättern oben links Platz zum Tackern lassen.
- Es sind *keine Hilfsmittel* erlaubt.
- Die mit (*) gekennzeichneten Aufgaben 3 und 4 müssen von Lehrämtlern und Nebenfächlern *nicht gerechnet* werden.
- Bearbeitungszeit: 90 min: Bachelor, 60 min: Lehramt und Nebenfach

Aufgabe	1	2	3(*)	4(*)	5	Summe
Maximale Punktzahl	6	6	5	5	8	30(20)
Erreichte Punktzahl						

Viel Erfolg!

Aufgabe 1. *Vektoralgebra und Vektoranalysis (6 Punkte)*

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie $\vec{a} \cdot \vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$.

(b) Der Ortsvektor in kartesischen Koordinaten ist gegeben durch $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und der Betrag des Ortsvektors wird als r bezeichnet. Berechnen Sie $\vec{\nabla}(1/r)$ und $\vec{\nabla} \times (r\vec{a})$.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 = -5$ 1P.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - (-1)(-2) \\ (-1) \cdot 4 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot (-2) - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$$ 1P.

b) $$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \partial_{x_i}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \, 2x_i = -\frac{x_i}{r^3}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$ 2P.

$$r\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2r \\ -r \end{pmatrix}, \quad \vec{\nabla} \times (r\vec{a}) = \begin{pmatrix} \partial_y(-r) - \partial_z(2r) \\ \partial_z(0) - \partial_x(-r) \\ \partial_x(2r) - \partial_y(0) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} r = \frac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{2x_i}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x_i}{r}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times (r\vec{a}) = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} -y - 2z \\ x \\ 2x \end{pmatrix}$$ 2P.

Aufgabe 2. *Krummlinige Koordinaten (6 Punkte)*

(a) Der Ortsvektor in Polarkoordinaten lautet $\vec{r} = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$. Berechnen Sie die dazugehörigen Einheitsvektoren $\hat{e}_\rho$ und $\hat{e}_\varphi$. Zeigen Sie, dass das Wegelement in Polarkoordinaten die Form $d\vec{r} = d\rho\hat{e}_\rho + \rho d\varphi\hat{e}_\varphi$ hat.

(b) Sei nun $\vec{F} = \hat{e}_\varphi$ ein zweidimensionales Vektorfeld gegeben in Polarkoordinaten und $W = \{\vec{r}(\rho,\varphi);\ \rho = R + \frac{\varphi}{2\pi}\Delta,\ \varphi \in [0, 2\pi]\}$ ein Spiralweg, wobei R und Δ positive Konstanten sind. Skizzieren Sie den Spiralweg W und berechnen Sie das Wegintegral $\int_W \vec{F}\cdot d\vec{r}$ des Feldes $\vec{F}$ entlang des Spiralwegs.

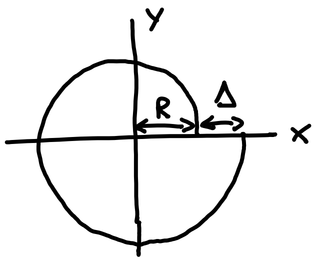
a) $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$, $\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}\right| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1 \Rightarrow \hat{e}_\rho = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$

1P.

$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix}-\rho\sin\varphi\\ \rho\cos\varphi\end{pmatrix}$, $\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right| = \rho \Rightarrow \hat{e}_\varphi = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}$ 1P.

$d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}d\rho + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}d\varphi = \hat{e}_\rho d\rho + \rho\hat{e}_\varphi d\varphi$ 1P.

b)



1P.

$$\int_W \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_W \hat{e}_\varphi(\hat{e}_\rho d\rho + \rho\hat{e}_\varphi d\varphi)$$

$$= \int_W \rho\, d\varphi \quad (\text{wegen } \hat{e}_\varphi\cdot\hat{e}_\rho = 0 \text{ und } \hat{e}_\varphi\cdot\hat{e}_\varphi = 1)$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(R + \frac{\varphi}{2\pi}\Delta\right)d\varphi \quad (\text{Spiralweg})$$

$$= R\varphi + \frac{1}{2}\varphi^2\frac{\Delta}{2\pi}\Big|_0^{2\pi} = 2\pi R + \pi\Delta$$ 2P.

Aufgabe 3. (*) *Matrixrechnung (5 Punkte)*

Gegeben sind die Matrizen,

$$A = \begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $A + B$ und AB. Einer der Eigenwerte der Matrix A ist $\lambda = -3$. Finden Sie die anderen Eigenwerte von A und berechnen Sie den zum Eigenwert $\lambda = -3$ gehörenden Eigenvektor.

$A + B = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 3\end{pmatrix}$ 1P.

$A\cdot B = \begin{pmatrix}3 & 7 & 7\\ 2 & 0 & 3\\ 1 & -5 & -2\end{pmatrix}$ 1P.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix}-2-\lambda & 2 & 1\\ 1 & -\lambda & 1\\ 3 & -1 & -\lambda\end{vmatrix} = -\lambda^2(2+\lambda) + 6 - 1 + 3\lambda - (2+\lambda) + 2\lambda$$

$$= -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda + 3 \stackrel{!}{=} 0$$

Erster Eigenwert gegeben: $\lambda = -3$

Polynomdivision:

$$(-\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda + 3) : (\lambda + 3) = -\lambda^2 + \lambda + 1$$

$$\begin{array}{l} \underline{\lambda^3 + 3\lambda^2} \\ \quad \lambda^2 + 4\lambda \\ \quad \underline{-\lambda^2 - 3\lambda} \\ \qquad \lambda + 3 \\ \qquad \underline{-\lambda - 3} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

Quadratische Gleichung $(-\lambda^2+\lambda+1)=0$ lösen:

$$\lambda_\pm = -\frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1+4}\right) = \frac{1}{2}\left(1 \mp \sqrt{5}\right) \quad 2P.$$

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = -3$

$$A\vec{v} = -3\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} v_1 + 2v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 + 3v_2 + v_3 = 0 \\ 3v_1 - v_2 + 3v_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow v_2 = 0 \text{ und } v_1 = -v_3$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad 1P.$$

Aufgabe 4. (*) *Taylorreihen, Extrema unter Nebenbedingungen (5 Punkte)*

(a) Geben Sie die Taylorentwicklung der reellen Funktion

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-2x}}$$

um $x_0 = 0$ bis einschließlich $\mathcal{O}(x^2)$ an.

(b) Lösen Sie die Gleichung $x^3 = \varepsilon e^x + 1$ iterativ bis einschließlich zur $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ für $x \in \mathbb{R}$. *Hinweis*: Es gilt $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+6abc$.

(c) Für $x, y, z > 0$ finden Sie das Extremum der Funktion $g(x,y,z) = xy^2z^3$ unter der Nebenbedingung $x + 2y + 3z = 6$.

a) $$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-2x}} \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}} - \frac{x\cdot(-2)}{2(1-2x)^{3/2}} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}\frac{-2}{(1-2x)^{3/2}} + \frac{1}{(1-2x)^{3/2}} - \frac{3}{2}\frac{x(-2)}{(1-2x)^{5/2}}$$

$$\Rightarrow f''(0) = 2$$

Taylor: $$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$$
$$= x + x^2 + \mathcal{O}(x^3) \quad 1{,}5P.$$

b) Iterativ $x = x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$

$$x^3 = x_0^3 + 3x_0^2x_1\varepsilon + (3x_0x_1^2 + 3x_0^2x_2)\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

$$e^x = e^{x_0} + e^{x_0}x_1\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

In Gleichung eingesetzt:

$$x_0^3 + 3x_0^2x_1\varepsilon + 3(x_0x_1^2 + x_0^2x_2)\varepsilon^2 = 1 + \varepsilon e^{x_0} + \varepsilon^2 x_1 e^{x_0}$$

bis einschließlich $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$

Koeffizientenvergleich:

$x_0^3 = 1 \implies x_0 = 1$

$3x_0^2 x_1 = e^{x_0} \implies x_1 = e/3$

$3(x_0 x_1^2 + x_0^2 x_2) = x_1 e^{x_0} \implies 3\left(\frac{e^2}{9} + x_2\right) = \frac{e^2}{3}$

$\implies x_2 = 0$

$\implies x = 1 + \frac{e}{3}\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$ 2P.

c) $g(x,y,z) = xy^2z^3$, $x,y,z > 0$

$j(x,y,z) = x + 2y + 3z - 6 = 0$ Nebenbed.

$\vec{\nabla}(g - \lambda j) = \vec{\nabla}\left(xy^2z^3 - \lambda(x+2y+3z-6)\right)$

$$= \begin{pmatrix} y^2z^3 - \lambda \\ 2xyz^3 - 2\lambda \\ 3xy^2z^2 - 3\lambda \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{array} \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array}$$

$\mathrm{I} \implies y^2z^3 = \lambda$

in $\mathrm{II} \implies 2xyz^3 - 2y^2z^3 = 0 \overset{y,z\neq 0}{\implies} x - y = 0 \implies x = y$

in $\mathrm{III} \implies 3xy^2z^2 - 3y^2z^3 = 0 \overset{y,z\neq 0}{\implies} x - z = 0 \implies x = z$

$\implies x = y = z = 1$ 1,5 P.

Aufgabe 5. *Differentialgleichungen (8 Punkte)*

(a) Die Funktion $g(t)$ erfüllt für $t \geq 1$ die Differentialgleichung

$$t^2\dot{g}(t) = 1 - g(t).$$

Finden Sie die allgemeine Losung dieser Differentialgleichung für $t \geq 1$ unter der Anfangsbedingung $g(1) = 0$.

(b) Die Funktion $y(t)$ erfullt die lineare Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = 3y(t) + te^t.$$

Die Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung lautet $y_h(t) = Ce^{3t}$. Finden Sie davon ausgehend eine partikuläre Lösung $y_p(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung durch Variation der Konstanten. Geben Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung unter der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ an.

a) separable DGl.

$t^2\dot{g}(t) = 1 - g(t) \implies t^2\frac{dg}{dt} = 1 - g \implies \frac{dg}{1-g} = \frac{dt}{t^2}$

Integration: $\int_{g_0}^{g}\frac{dg'}{1-g'} = -\ln(1-g')\Big|_{g_0}^{g} = -\ln\frac{1-g}{1-g_0}$

$\int_{t_0}^{t}\frac{dt'}{t'^2} = -\frac{1}{t'}\Big|_{t_0}^{t} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{t_0}$

$t_0 = 1$ und $g_0 = g(t_0) = g(1) = 0$

$\implies -\ln(1-g) = -\frac{1}{t} + 1$

$\implies 1 - g = e^{\frac{1}{t}-1} \implies g(t) = 1 - e^{\frac{1}{t}-1}$ 4P.

b) $\dot{y}(t) = 3y(t) + te^t$

Lösung der homogenen Gl: $y_h(t) = Ce^{3t}$

Variation der Konstante:

$y_p(t) = C(t)e^{3t}$ in Gleichung eingesetzt

$$\dot{C}(t)e^{3t} + 3\cancel{C(t)}e^{3t} = 3\cancel{C(t)}e^{3t} + te^{t}$$

$$\Rightarrow \dot{C}(t) = te^{-2t}$$

Integration:

part. int.

$$C(t) = \int te^{-2t}\,dt = -\frac{1}{2}te^{-2t} - \int \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2t}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2t} + \tilde{C}$$

Konstante kann in hom. Lösung gezogen werden

$$= e^{-2t}\left(-\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow y_p(t) = -\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{t}$$

Allgemeine Lösung:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ce^{3t} - \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{t}$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = C - \frac{1}{4} \Rightarrow C = 1/4$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{4}e^{3t} - \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{t}$$

4P.