Prof. Jan von Delft, Übungen: Olga Goulko (O.Goulko@physik.uni-muenchen.de)
http://homepages.physik.uni-muenchen.de/~vondelft/Lehre/11t0/

Probeklausur

Donnerstag, 12.01.2012

Name:

Matrikelnummer:

- Jede Aufgabe ist auf *getrennten Blättern* zu lösen.
- Bitte versehen Sie jedes extra Blatt mit ihrem *Namen* und der *Nummer der darauf bearbeiteten Aufgabe.*
- Bitte auf allen Blättern oben links Platz zum Tackern lassen.
- Es sind *keine Hilfsmittel* erlaubt.
- Die mit (*) gekennzeichneten Aufgaben 3 und 4 müssen von Lehrämtlern und Nebenfächlern *nicht gerechnet* werden.
- Bearbeitungszeit: 90 min: Bachelor, 60 min: Lehramt und Nebenfach

Aufgabe	1	2	3(*)	4(*)	5	Summe
Maximale Punktzahl	6	6	5	5	8	30(20)
Erreichte Punktzahl						

Viel Erfolg!

Aufgabe 1. *Vektoralgebra und Vektoranalysis (6 Punkte)*

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie $\vec{a} \cdot \vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$.

(b) Der Ortsvektor in kartesischen Koordinaten ist gegeben durch $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und der Betrag des Ortsvektors wird als r bezeichnet. Berechnen Sie $\vec{\nabla}(1/r)$ und $\vec{\nabla} \times (r\vec{a})$.

Aufgabe 2. *Krummlinige Koordinaten (6 Punkte)*

(a) Der Ortsvektor in Polarkoordinaten lautet $\vec{r} = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$. Berechnen Sie die dazugehörigen Einheitsvektoren $\hat{e}_\rho$ und $\hat{e}_\varphi$. Zeigen Sie, dass das Wegelement in Polarkoordinaten die Form $d\vec{r} = d\rho \hat{e}_\rho + \rho d\varphi \hat{e}_\varphi$ hat.

(b) Sei nun $\vec{F} = \hat{e}_\varphi$ ein zweidimensionales Vektorfeld gegeben in Polarkoordinaten und $W = \{\vec{r}(\rho, \varphi);\ \rho = R + \frac{\varphi}{2\pi}\Delta,\ \varphi \in [0, 2\pi]\}$ ein Spiralweg, wobei R und Δ positive Konstanten sind. Skizzieren Sie den Spiralweg W und berechnen Sie das Wegintegral $\int_W \vec{F} \cdot d\vec{r}$ des Feldes $\vec{F}$ entlang des Spiralwegs.

Aufgabe 3. (*) *Matrixrechnung (5 Punkte)*

Gegeben sind die Matrizen,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $A + B$ und AB. Einer der Eigenwerte der Matrix A ist $\lambda = -3$. Finden Sie die anderen Eigenwerte von A und berechnen Sie den zum Eigenwert $\lambda = -3$ gehörenden Eigenvektor.

Aufgabe 4. (*) *Taylorreihen, Extrema unter Nebenbedingungen (5 Punkte)*

(a) Geben Sie die Taylorentwicklung der reellen Funktion

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-2x}}$$

um $x_0 = 0$ bis einschließlich $\mathcal{O}(x^2)$ an.

(b) Lösen Sie die Gleichung $x^3 = \varepsilon e^x + 1$ iterativ bis einschließlich zur $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ für $x \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Es gilt $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 6abc$.

(c) Für $x, y, z > 0$ finden Sie das Extremum der Funktion $g(x, y, z) = xy^2z^3$ unter der Nebenbedingung $x + 2y + 3z = 6$.

Aufgabe 5. *Differentialgleichungen (8 Punkte)*

(a) Die Funktion $g(t)$ erfüllt für $t \geq 1$ die Differentialgleichung

$$t^2 \dot{g}(t) = 1 - g(t).$$

Finden Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung für $t \geq 1$ unter der Anfangsbedingung $g(1) = 0$.

(b) Die Funktion $y(t)$ erfüllt die lineare Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = 3y(t) + te^t.$$

Die Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung lautet $y_h(t) = Ce^{3t}$. Finden Sie davon ausgehend eine partikuläre Lösung $y_p(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung durch Variation der Konstanten. Geben Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung unter der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ an.