Musterlösung Hauptklausur

Aufgabe 1. *Gradient*

Gegeben ist die Funktion $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\phi(x, y) = e^{-(x^2+2y^2)}$$

(a)

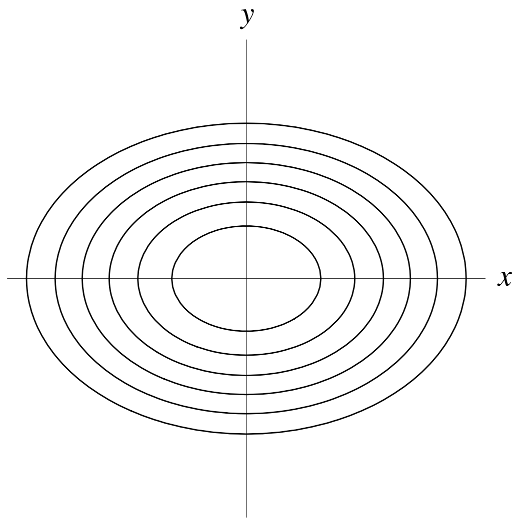
$$\nabla\phi = -e^{-(x^2+2y^2)} \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \end{pmatrix} \Rightarrow ||\nabla\phi||^2 = e^{-2(x^2+2y^2)}(4x^2 + 16y^2)$$

(b) Bei einem Extremum muss gelten $||\nabla\phi||^2 = 0$. Dies ist nur bei $x = y = 0$ der Fall. Dieses Extremum ist ein Maximum, da die Exponentialfunktion für negative Exponenten immer kleiner als $e^0 = 1$ ist. Alternativ kann man es auch daran erkennen, dass der Gradientenvektor $\nabla\phi$ immer in Richtung des Ursprungs zeigt.

(c)

$$\nabla\phi \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{2x}{4y} = \frac{3}{-1} \Rightarrow y = \frac{-x}{6}$$

(d) Konturlinien sind Ellipsen, denn $e^{-(x^2+2y^2)} = H =$const. $\Rightarrow x^2 + 2y^2 = -\ln H =$const.



Aufgabe 2. *Eigenwertproblem*

Kurzer Lösungsweg: Da die dritte Reihe und dritte Spalte von A nur 0-Einträge für die nicht-diagonalen Matrixelemente enthalten, lässt sich ein Eigenwert und Eigenvektor sofort per Inspektion angeben: $\lambda_1 = 5$, $\mathbf{u} = (0, 0, 1)^T$.

Die anderen beiden Eigenwerte und Eigenvektoren lassen sich durch Betrachtung der 2x2-Untermatrix $A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ finden:

$$0 = \det(A' - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(4-\lambda) - 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 5)\ .$$

Somit sind die beiden anderen Eigenwerte $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 5$. Die entsprechenden Eigenvektoren haben die Form $\mathbf{v} = (v_1, v_2, 0)^T$ und $\mathbf{w} = (w_1, w_2, 0)^T$ (jeweils mit dritter Komponente =0, zwecks Orthogonalität zu $\mathbf{u}$), und lassen sich per Inspektion finden:

$$\begin{pmatrix} 3-2 & 1 \\ 2 & 4-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3-5 & 1 \\ 2 & 4-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Somit: $\mathbf{v} = (1, -1, 0)^T$ und $\mathbf{w} = (1, 2, 0)^T$.

Standardlösungsweg:
Eigenwerte von A = Nullstellen des charakteristischen Polynoms,

$$0 = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = [(3-\lambda)(4-\lambda) - 2]\,(5-\lambda)$$

durch Entwickeln nach der dritten Zeile bzw. Spalte (um das Vorhandensein von Nullen in A auszunutzen!). Ein Eigenwert, nämlich $\lambda_1 = 5$, lässt sich somit sofort ablesen. Zur Bestimmung der anderen beiden Eigenwerte lösen wir

$$(3-\lambda)(4-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 12 - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

mit der allgemeinen Lösungsformel für quadratische Gleichungen,

$$\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}\left(7 \mp \sqrt{49 - 40}\right) = \frac{1}{2}(7 \mp 3)\ ,$$

und finden somit $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 5$. Der Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_3 = 5$ ist somit entartet.

Bestimmen wir zuerst den Eigenvektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ zum nicht entarteten Eigenwert $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 3-2 & 1 & 0 \\ 2 & 4-2 & 0 \\ 0 & 0 & 5-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} v_1 + v_2 & = 0 \\ 2v_1 + 2v_2 & = 0 \\ 3v_2 & = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für den entarteten Eigenwert $\lambda_{1,3} = 5$ suchen wir Eigenvektoren der Form $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)^T$, indem wir folgende Gleichung lösen:

$$\begin{pmatrix} 3-5 & 1 & 0 \\ 2 & 4-5 & 0 \\ 0 & 0 & 5-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ll} -2w_1 + w_2 & = 0 \\ 2w_1 - w_2 & = 0 \\ 0 & = 0 \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem hat zum Beispiel die Lösung $w_1 = 1$ und $w_2 = 2$, wobei w_3 beliebig gewählt werden kann. Wir können also zwei (linear unabhängige) Eigenvektoren so wählen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Natürlich kann man auch andere Linearkombinationen wählen, zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{usw.}$$

Aufgabe 3. *Gram-Schmidt Verfahren*

Normierung von $\vec{v}_1$:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\vec{v}_1}{|\vec{v}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gram-Schmidt auf $\vec{v}_2$:

$$\vec{v}_{2,\perp} = \vec{v}_2 - (\vec{v}_2 \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 = \vec{v}_2 - 0,$$

da $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ bereits orthogonal sind. Normierung:

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\vec{v}_2}{|\vec{v}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gram-Schmidt auf $\vec{v}_3$:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{3,\perp} &= \vec{v}_3 - (\vec{v}_3 \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 - (\vec{v}_3 \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

da bereits normiert.

Aufgabe 4. *Volumenintegral über Kegelstumpf*

$$\begin{aligned} \text{Zylinderkoordinaten}: \quad x &= \rho \cos\phi \\ y &= \rho \sin\phi \\ z &= z \\ \text{Volumenelement}: \quad \delta V &= \rho\, \delta\rho\, \delta\phi\, \delta z \end{aligned}$$

Das Integrationsgebiet ist gegeben durch

$$\begin{aligned} 0 \leq \ &\rho \ \leq z \\ 1 \leq \ &z \ \leq 2 \\ 0 \leq \ &\phi \ \leq 2\pi \end{aligned}$$

Das Volumenintegral ist somit

$$\begin{aligned} \int dV \cdot z &= \int_1^2 dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^z d\rho\, \rho z \\ &= \int_1^2 dz \cdot 2\pi \cdot z \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_0^z \\ &= 2\pi \int_1^2 dz z \frac{z^2}{2} \\ &= \pi \int_1^2 dz z^3 = \pi \left. \frac{z^4}{4} \right|_1^2 = \frac{\pi}{4} \left(2^4 - 1^4 \right) = \frac{15\pi}{4} \end{aligned}$$

Aufgabe 5. *Linienintegral*

$$I = \int_0^a \mathrm{d}t\, \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \int_0^a \mathrm{d}t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sinh \frac{t}{a} \\ -\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sqrt{\cosh^2 \frac{t}{a} - 1} \\ -\sin t \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$= \int_0^a \mathrm{d}t \left[\cos^2 t + \sinh^2 \frac{t}{a} + \sin^2 t \right] = \int_0^a \mathrm{d}t \left[1 + \sinh^2 \frac{t}{a} \right] \tag{2}$$

$$= \int_0^a \mathrm{d}t \cosh^2 \frac{t}{a} = \frac{1}{2} \int_0^a \left[1 + \cosh \frac{2t}{a} \right] \mathrm{d}t \tag{3}$$

$$= \frac{1}{2} \left[t + \frac{a}{2} \sinh \frac{2t}{a} \right]_0^a = \frac{a}{2} + \frac{a}{4} \sinh 2\, . \tag{4}$$

Aufgabe 6. *Basistransformation*

a)

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} s & -s \\ s & s \end{pmatrix}, \quad s = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

b)

$$\mathbf{y} = AB\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & -s \\ s & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

c) Sei $\mathbf{y} = C\mathbf{x}$, wobei $\mathbf{y}$ und $\mathbf{x}$ von der Basistransformation abbildet werden auf $\mathbf{y}' = T\mathbf{y}$ und $\mathbf{x}' = T\mathbf{x}$. Dann gilt

$$\mathbf{y}' = T\mathbf{y} = TC\mathbf{x} = TCT^{-1}T\mathbf{x} = \underbrace{TCT^{-1}}_{\equiv C'} \mathbf{x}' \equiv C'\mathbf{x}' \tag{7}$$

Also ist die Darstellung von C in der neuen Basis gegeben durch:

$$C' = TCT^{-1} = BCB^{-1} = \begin{pmatrix} s & -s \\ s & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & s \\ -s & s \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$= \begin{pmatrix} s & -s \\ s & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -s & s \\ s & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s^2 & 0 \\ 0 & 2s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Aufgabe 7. *Iteratives Lösen von Gleichungen*

Zu lösende Gleichung:

$$\ln\left[(x+1)^2\right] + \mathrm{e}^{y(x)} = 1 - y(x) \; . \tag{10}$$

(a) Für $y(0) = 0$ ist die Gleichung bei $x = 0$ erfüllt, denn:

$$\ln 1 + \mathrm{e}^0 = 1 - 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 1 \tag{11}$$

(b) **Lösungsweg A:**
Die Taylor-Reihe für $y(x)$ hat die Form:

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{1}{2!}y''(0)x^2 + \mathcal{O}(x^3) \; . \tag{12}$$

Die Taylor-Koeffizienten $y'(0)$ und $y''(0)$ lassen sich iterativ bestimmen durch Gleichsetzen der Taylor-Entwicklungen der linken und rechten Seiten von Gl. (10):

$$d_x(10): \quad \frac{2}{x+1} + \mathrm{e}^y y' = -y' \tag{13}$$

$$(13)_{x=0}: \quad 2 + y'(0) = -y'(0) \quad \Rightarrow \quad y'(0) = -1 \tag{14}$$

$$d_x(13): \quad \frac{-2}{(x+1)^2} + \mathrm{e}^y\left[(y')^2 + y''\right] = -y'' \tag{15}$$

$$(15)_{x=0}: \quad -2 + 1 + y''(0) = -y''(0) \quad \Rightarrow \quad y''(0) = \frac{1}{2} \tag{16}$$

Folglich hat die Taylor-Reihe (12) für $y(x)$ folgende Form:

$$y(x) = -x + \frac{1}{4}x^2 + \mathcal{O}(x^3) \; . \tag{17}$$

Lösungsweg B:
Ansatz für Reihenentwicklung von $y(x)$:

$$y(x) = y_0 + y_1 x + y_2 x^2 + \mathcal{O}(x^3) \; , \qquad \text{mit} \quad y_0 = 0 \quad [\text{wegen (a)}] \; . \tag{18}$$

Reihentwicklungen des Logarithmus und der Exponentialfunktion:

$$\ln\left[(1+x)^2\right] = 2\ln(1+x) = 2\left[x - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3)\right] \tag{19}$$

$$e^{y(x)} = e^{y_0} e^{\left[y_1 x + y_2 x^2 + \mathcal{O}(x^3)\right]} = e^{y_0}\left[1 + (y_1 x + y_2 x^2) + \frac{1}{2!}(y_1 x)^2 + \mathcal{O}(x^3)\right] \tag{20}$$

Eingesetzt in (10), mit $y_0 = 0$:

$$2x - x^2 + \left[1 + y_1 x + (y_2 + \tfrac{1}{2} y_1) x^2\right] + \mathcal{O}(x^3) = 1 - y_1 x - y_2 x^2 + \mathcal{O}(x^3) \ . \tag{21}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{O}(x^0): & 1 &= 1 & &\Rightarrow & &\text{bestätigt} \quad \text{(a)} & (22)\\
&\mathcal{O}(x^1): & 2 + y_1 &= -y_1 & &\Rightarrow & &y_1 = -1 & (23)\\
&\mathcal{O}(x^2): & -1 + y_2 + 1/2 &= -y_2 & &\Rightarrow & &y_2 = \tfrac{1}{4} & (24)
\end{aligned}$$

Somit hat die gesuchte Reihenentwicklung (18) folgende Form:

$$y(x) = -x + \frac{1}{4} x^2 + \mathcal{O}(x^3) \ . \tag{25}$$

Aufgabe 8. *Fourier-Reihe von* $|\sin x|$

$f(x) = |\sin x|$ ist periodisch, mit Periode $L = \pi$. Fourier-Reihenansatz:

$$f(x) = \frac{1}{L} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i2\pi n x/L} \tilde{f}_n \ , \tag{26}$$

$$\tilde{f}_n = \int_0^L \mathrm{d}x \, e^{-i2\pi n x/L} f(x) \tag{27}$$

Für $x \in [0, \pi]$ gilt $f(x) = \sin x$. Nutze ferner $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_n &= \frac{1}{2i} \int_0^L \mathrm{d}x \, \left(e^{ix(-2n+1)} - e^{-ix(2n+1)}\right) & (28)\\
&= \frac{1}{2i} \left(\frac{e^{i\pi(-2n+1)} - 1}{i(-2n+1)} - \frac{e^{-i\pi(2n+1)} - 1}{(-i)(2n+1)} \right) \ , \quad e^{i\pi m} = (-1)^m \ , & (29)\\
&= \left(\frac{1}{-2n+1} + \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{2}{1 - (2n)^2} & (30)
\end{aligned}$$

Folglich lautet die Fourier-Reihendarstellung von $|\sin x|$ wie folgt:

$$|\sin(x)| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i2\pi n x/L} \frac{2}{\pi(1 - 4n^2)} \ . \tag{31}$$

Hinweis: es gilt $\tilde{f}_n = \tilde{f}_{-n}$ (eine Konsequenz der Tatsache, dass die Funktion $|\sin x|$ ist symmetrisch ist). Folglich kann die Fourier-Reihe auch als (hier nicht verlangte) Kosinus-Reihe geschrieben werden, durch Nutzung von $e^{i2nx} + e^{-i2nx} = 2\cos(2nx)$:

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1 - 4n^2)} \cos(2nx) \ . \tag{32}$$

Alternativer Lösungsweg, via Kosinus-Reihe

Die Funktion $|\sin x|$ ist symmetrisch, somit enthält die Fourier-Reihe nur Kosinus-Terme. Die Periode ist $L=\pi$, also $k=2\pi n/L=2n$

$$|\sin x| = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2nx) \tag{33}$$

Die Koeffizienten lauten:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} dx\,|\sin x|\cos(2nx) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} dx\,\sin x\cos(2nx)\,, \tag{34}$$

da die Sinus-Funktion im Intervall $[0,\pi]$ sowieso positiv ist.

Berechnung der Integrale z.B. mittels Darstellung durch Exponentialfunktionen:

$$\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\ , \qquad \cos(2nx) = \frac{1}{2}\left(e^{2inx}+e^{-2inx}\right) \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} dx\frac{1}{4i}\left(e^{ix(1+2n)}+e^{ix(1-2n)}-e^{-ix(1-2n)}-e^{-ix(1+2n)}\right) && (36)\\
&= \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{e^{ix(1+2n)}}{i(1+2n)}+\frac{e^{ix(1-2n)}}{i(1-2n)}+\frac{e^{-ix(1-2n)}}{i(1-2n)}+\frac{e^{-ix(1+2n)}}{i(1+2n)}\right]_0^{\pi} && (37)
\end{aligned}$$

Für $m\in\mathbb{Z}$ gilt $e^{i\pi m}=(-1)^m$. Da $1\pm 2n$ für ganzzahlige n ungerade ist, gilt somit

$$\begin{aligned}
a_n &= -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{1+2n}(-1-1)+\frac{2}{1-2n}(-1-1)\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1+2n}+\frac{1}{1-2n}\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\frac{1-2n+1+2n}{(1+2n)(1-2n)} = \frac{4}{\pi(1-4n^2)}
\end{aligned} \tag{38}$$

Kosinus-Reihe:

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(1-4n^2)}\cos(2nx)\ . \tag{39}$$

Da $\cos(2nx)=(e^{i2nx}+e^{-i2nx})/2$, ist die entsprechende Fourier-Reihe:

$$|\sin x| = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{2}{\pi(1-4n^2)}e^{i2nx}\ . \tag{40}$$

Aufgabe 9. *Differentialgleichungen*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2}{\sqrt{a^2-x^2}} \tag{41}$$

$$\int_{y(0)=1}^{y(x)}\frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\tilde{y}^2} = \int_0^x \mathrm{d}\tilde{x}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} =: F(x) \tag{42}$$

$$-\frac{1}{y}\bigg|_1^{y(x)} = F(x) \tag{43}$$

$$1-\frac{1}{y(x)} = F(x) \quad\Rightarrow\quad y(x) = \frac{1}{1-F(x)} \tag{44}$$

Bestimme nun die Funktion $F(x)$,

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{a^2 - \tilde{x}^2}} \mathrm{d}\tilde{x} \tag{45}$$

mittels der Substition:

$$\tilde{x} = a \sin t \qquad \frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\mathrm{d}t} = a \cos t \qquad \tilde{x} \in [0, x] \;\Rightarrow\; t \in [0, \arcsin \frac{x}{a}] \tag{46}$$

$$F(x) = \int_0^{\arcsin \frac{x}{a}} \frac{\cos t}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} \mathrm{d}t = \int_0^{\arcsin \frac{x}{a}} \mathrm{d}t = \arcsin \frac{x}{a} \tag{47}$$

Somit:

$$y(x) = \frac{1}{1 - \arcsin \frac{x}{a}} \tag{48}$$

Aufgabe 10. *Greensche Funktion*

(a)

$$\begin{aligned}
x_p(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mathcal{G}(t - t')\theta(t')e^{-\gamma(t')} \\
&= \frac{1}{\Omega_r} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \theta(t - t') \sin((\Omega_r(t - t'))e^{-\gamma(t-t')}\, \theta(t')e^{-\gamma t'} \\
&= \frac{1}{\Omega_r} e^{-\gamma t} \int_0^t dt' \sin(\Omega_r(t - t')),
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Eigenschaft der beiden θ-Funktionen benutzt haben um die Integrationsgrenzen anzupassen. Nun können wir das Integral ausführen,

$$\begin{aligned}
x_p(t) &= e^{-\gamma t} \frac{1}{\Omega_r^2} \cos(\Omega_r(t - t')\Big|_0^t \\
&= = e^{-\gamma t} \frac{1}{\Omega_r^2} \left(1 - \cos(\Omega_r t)\right)
\end{aligned}$$

(b) Gegeben:

$$\mathcal{G}(t) = \frac{\theta(t)}{\Omega_r} \sin(\Omega_r t)e^{-\gamma t} \tag{49}$$

Berechnen der Ableitungen:

$$d_t\mathcal{G}(t) = \frac{\delta(t)}{\Omega_r} \sin(\Omega_r t)e^{-\gamma t} + \frac{\theta(t)}{\Omega_r} \Big(\Omega_r \cos(\Omega_r t) - \gamma \sin(\Omega_r t)\Big) e^{-\gamma t} \tag{50}$$

Der Term mit der δ-Funktion verschwindet wegen $\delta(t)\sin(\Omega_r t) = \delta(t)\sin(0) = 0$, siehe Hinweis 2. Somit

$$d_t\mathcal{G}(t) = \frac{\theta(t)}{\Omega_r} \left(\Omega_r \cos(\Omega_r t) - \gamma \sin(\Omega_r t)\right) e^{-\gamma t} \tag{51}$$

Zweite Ableitung:

$$\begin{aligned}
d_t^2\mathcal{G}(t) &= \frac{\delta(t)}{\Omega_r}\Big(\Omega_r\cos(\Omega_r t) - \gamma\sin(\Omega_r t)\Big)e^{-\gamma t} \\
&\quad + \frac{\theta(t)}{\Omega_r}\Big(-\Omega_r^2\sin(\Omega_r t) - \gamma\Omega_r\cos(\Omega_r t) - \gamma\Omega_r\cos(\Omega_r t) + \gamma^2\sin(\Omega_r t)\Big)e^{-\gamma t} \\
&= \delta(t) + \frac{\theta(t)}{\Omega_r}\Big((-\Omega_r^2+\gamma^2)\sin(\Omega_r t) - 2\Omega_r\gamma\cos(\Omega_r t)\Big)e^{-\gamma t}
\end{aligned}$$

da der Vorfaktor von $\delta(t)$, ausgewertet bei $t = 0$, gleich 1 ist. $\mathcal{G}$, $d_t\mathcal{G}$ und $d_t^2\mathcal{G}$, eingesetzt in die Differentialgleichung, liefern:

$$\begin{aligned}
&\left(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2\right)\mathcal{G}(t) = \\
&= \delta(t) + \frac{\theta(t)e^{-\gamma t}}{\Omega_r}\Big[\sin(\Omega_r t)\Big(-\Omega_r^2 + \gamma^2 - 2\gamma^2 + \Omega^2\Big) + \cos(\Omega_r t)\Big(-\gamma - \gamma + 2\gamma\Big)\Omega_r\Big] \\
&= \delta(t)\ ,
\end{aligned}$$

denn laut der Definition von Ω_r gilt $-\Omega_r^2 - \gamma^2 + \Omega^2 = 0$. Somit erfüllt $\mathcal{G}(t)$ tatsächlich die angegebene Differentialgleichung.

Alternativer Lösungsweg:

Schreibe die Greensche Funktion als $\mathcal{G}(t) = \theta(t)x_h(t)$, wobei

$$x_h(t) = \frac{1}{\Omega_r}\sin(\Omega_r t)e^{-\gamma t} = \frac{1}{\Omega_r 2i}e^{t(i\Omega_r-\gamma)} + \text{k.k.} \tag{52}$$

$$d_t x_h(t) = \frac{1}{\Omega_r}\Big(\Omega_r\cos(\Omega_r t) - \gamma\sin(\Omega_r t)\Big)e^{-\gamma t}\ . \tag{53}$$

Dann ist $x_h(t)$ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung,

$$\begin{aligned}
(d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2)x_h(t) &= \frac{1}{\Omega_r 2i}e^{t(i\Omega_r-\gamma)}\Big((i\Omega_r-\gamma)^2 + 2\gamma(i\Omega_r-\gamma)\Big) + \text{k.k.} \\
&= \frac{1}{\Omega_r 2i}e^{t(i\Omega_r-\gamma)}\Big(-\Omega_r^2 - \gamma^2 + \Omega^2\Big) + \text{k.k.} = 0
\end{aligned} \tag{54}$$

denn laut der Definition von Ω_r gilt $-\Omega_r^2 - \gamma^2 + \Omega^2 = 0$. Ferner gilt $x_h(0) = 0$ und $d_t x_h(0) = 1$, und folglich

$$d_t\big[\theta(t)x_h(t)\big] = \underbrace{\delta(t)x_h(t)}_{=0,\ \text{da}\ x_h(0)=0} + \theta(t)d_t x_h(t)\ , \tag{55}$$

$$d_t^2\big[\theta(t)x_h(t)\big] = \underbrace{\delta(t)d_t x_h(t)}_{=\delta(t),\ \text{da}\ d_t x_h(0)=1} + \theta(t)d_t^2 x_h(t)\ . \tag{56}$$

Somit erfüllt $\mathcal{G}(t)$ die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
\big[d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2\big]\mathcal{G}(t) &= \big[d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2\big]\theta(t)x_h(t) \\
&= \delta(t) + \theta(t)\big[d_t^2 + 2\gamma d_t + \Omega^2\big]x_h(t) \\
&= \delta(t)\ .
\end{aligned} \tag{57}$$

Aufgabe 11. *Satz von Stokes*

(a)

$$\Phi = \int_{\mathrm{HK}} \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = \int_{\mathrm{HK}} \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$$

mit

$$\delta\mathbf{S} = \sin\theta R^2\, \delta\varphi\, \delta\theta\, \mathbf{e}_r \,, \tag{58}$$

also brauchen wir nur die r-Komponente von $\nabla \times \mathbf{A}$:

$$(\nabla \times \mathbf{A})_r = \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta \left(\frac{\gamma \sin\theta}{r^3}\sin\theta\right) = \frac{\gamma}{r^4 \sin\theta}\partial_\theta(\sin^2\theta) = \frac{2\gamma\cos\theta}{r^4} \,. \tag{59}$$

$$\Phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta\, \sin\theta R^2 \frac{2\gamma\cos\theta}{R^4} = \frac{2\gamma\pi}{R^2} \tag{60}$$

Dabei nutzten wir das Integral $\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\, \sin\theta\, \cos\theta = \frac{1}{2}\sin^2\theta|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$.

(b) Laut Stokes können wir das Flussintegral auch als Linienintegral ausdrücken, entlang dem Rand der Halbkugel, also einem Kreis γ mit Radius R bei $\theta = \pi/2$:

$$\Phi = \int_\gamma \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\varphi} \cdot \mathbf{A} \,. \tag{61}$$

Entlang γ gilt $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\varphi} = R\mathbf{e}_\varphi$, somit:

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi (R\mathbf{e}_\varphi) \cdot \left(\frac{\gamma\sin(\pi/2)}{R^3}\mathbf{e}_\varphi\right) = \frac{2\pi\gamma}{R^2} \,. \tag{62}$$

Aufgabe 12. *Residuensatz*

(a) Die Polstellen von $h(z)$ sind die Nullstellen des Nenners $(z^2 - iz + 2)(z + 9)^2$.

$$z^2 - iz + 2 = 0 \Rightarrow z_\pm = \frac{1}{2}\left(i \pm \sqrt{-1-8}\right) = \frac{1}{2}(i \pm 3i)$$

Damit ergeben sich folgende Pole: $z_1 = 2i$ und $z_2 = -i$, jeweils der Ordnung 1, sowie $z_3 = -9$, der Ordnung 2:

$$h(z) = \frac{z}{(z-2i)(z+i)(z+9)^2}$$

(b) Konturen:
γ_1 Kreis um $z = 0$, Radius 0.5
γ_2 Kreis um $z = -i$, Radius 1
γ_3 Kreis um $z = -i$, Radius 4

γ_1 enthält keinen Pol, somit ergibt das Integral Null:

$$\oint_{\gamma_1} h(z)dz = 0$$

γ_2 enthält eine Singularität bei $z_2 = -i$, mit Residuum:

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(h,-i) &= \lim_{z\to -i} \frac{z(z+i)}{(z-2i)(z+i)(z+9)^2} = \lim_{z\to -i} \frac{z}{(z-2i)(z+9)^2} \\ &= \frac{-i}{-3i(9-i)^2} = \frac{1}{3(9-i)^2}\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\oint_{\gamma_2} h(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(h,-i) = \frac{2\pi i}{3(9-i)^2}$$

γ_3 enthält zwei Singularitäten, bei $z_1 = 2i$ und $z_2 = -i$. Das Residuum bei $-i$ haben wir bereits ausgerechnet; das Residuum bei $2i$ beträgt:

$$\mathrm{Res}(h,2i) = \lim_{z\to 2i} \frac{z(z-2i)}{(z-2i)(z+i)(z+9)^2} = \lim_{z\to 2i} \frac{z}{(z+i)(z+9)^2} = \frac{2i}{3i(2i+9)^2} = \frac{2}{3(2i+9)^2}$$

Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma_3} h(z)dz &= 2\pi i[\mathrm{Res}(h,-i) + \mathrm{Res}(h,2i)] \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{3(9-i)^2} + \frac{2}{3(2i+9)^2} \right)\end{aligned}$$

Weitere Vereinfachungen/Umformungen sind nicht erforderlich, werden aber vollständigkeitshalber dennoch hier angebeben:

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma_3} h(z)dz &= 2\pi i \frac{(2i+9)^2 + (9-i)^2}{3(9-i)^2(2i+9)^2} = 2\pi i \frac{(2i+9)^2 + (9-i)^2}{3(9-i)^2(2i+9)^2} \\ &= 2\pi i \frac{-4+81+36i+2(81-18i-1)}{3(81+2-9i+18i)^2} = 2\pi i \frac{237}{3(83+9i)^2} = \frac{158\pi i}{(83+9i)^2}\end{aligned}$$