Hauptklausur

Montag, 11.02.2013

Name:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Übungsgruppe:

- Jede Aufgabe ist auf *getrennten Blättern* zu lösen.
- Bitte versehen Sie jedes extra Blatt mit Ihrem *Namen* und der *Nummer der darauf bearbeiteten Aufgabe*.
- Achten Sie darauf, dass alle Blätter der Klausurangabe abgegeben werden. Fehlende Aufgaben werden mit null Punkten bewertet.
- Bitte auf allen Blättern oben links Platz zum Tackern lassen.
- Es sind *keine Hilfsmittel* erlaubt.
- Bearbeitungszeit: Bachelor: 180 min, Lehramt und Nebenfach: 120 min
- Lehramt/Nebenfach: Es dürfen beliebige 8 der 12 Aufgaben bearbeitet werden. Werden mehr als 8 Aufgaben bearbeitet, dann werden die besten 8 gewertet. Die ersten 8 Aufgaben befassen sich mit dem für Lehramt und Nebenfach relevanten Stoff.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Summe
Punktzahl	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	60
Erreichte Punktzahl													

Viel Erfolg!

Aufgabe 1. *Gradient*

Gegeben ist die Funktion $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\phi(x, y) = e^{-(x^2+2y^2)}$$

(a) (2 Punkte) Berechnen Sie $\nabla\phi$ und $||\nabla\phi||^2$.

(b) (1 Punkt) Hat die Funktion ϕ Extrema? Wenn ja, wo befinden sich diese und handelt es sich um Maxima oder Minima?

(c) (1 Punkt) Wo ist $\nabla\phi$ parallel zu $(3, -1)^T$?

(d) (1 Punkt) Skizzieren Sie die Konturlinien von ϕ.

Aufgabe 2. *Eigenwertproblem*

Finden Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

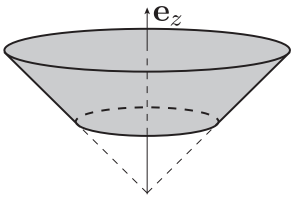
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. *Gram-Schmidt Verfahren*

Bilden Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt Verfahrens eine orthonormale Basis für den Unterraum $U = \mathrm{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \subset \mathbb{R}^4$, der durch folgende linear unabhängigen Vektoren aufgespannt wird:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. *Volumenintegral über Kegelstumpf*



Berechnen Sie in Zylinderkoordinaten das Volumenintegral

$$I = \int dV \cdot z$$

über einen auf der z-Achse zentrierten Kegelstumpf, mit $1 \leq z \leq 2$ und $x^2 + y^2 \leq z^2$.

Aufgabe 5. *Linienintegral*

Berechnen Sie das Linienintegral $I = \int_\gamma d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}$ des Vektorfelds

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \\ \sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1} \\ -x \end{pmatrix}$$

entlang der Raumkurve $\gamma : \{\mathbf{r}(t), t \in [0, a]\}$, mit

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ a \cosh \frac{t}{a} \\ \cos t \end{pmatrix}, \qquad 0 < a \in \mathbb{R} \,.$$

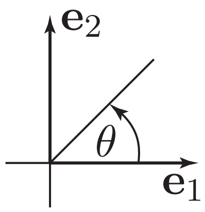
Hinweise:

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \qquad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1, \qquad \cosh^2 t = \frac{1}{2}[1 + \cosh 2t]$$

Aufgabe 6. *Basistransformation*

Betrachen Sie die folgenden Operationen in $\mathbb{R}^2$, mit Standardbasis $\mathbf{e}_1 = (1,0)^T$, $\mathbf{e}_1 = (0,1)^T$.



$A:$ Streckung der 1-Achse um den Faktor $s_1 = \frac{1}{2}$ und der 2-Achse um den Faktor $s_2 = 4$.

$B:$ Rotation um den Winkel $\theta = \frac{\pi}{4}$.

$C:$ Vertauschung der beiden Achsen.

(a) (1 Punkt) Finden Sie die Matrixdarstellungen (bezüglich der Standardbasis) von A, B und C.

(b) (2 Punkte) Was ist das Bild $\mathbf{y} = AB\mathbf{x}$ des Vektors $\mathbf{x} = (1,-1)^T$ unter der Transformation AB?

(c) (2 Punkte) Sei $T = B$ eine Basistransformation von der Standardbasis zu einer neuen Basis, die den Vektor $\mathbf{x}$ abbildet auf $\mathbf{x}' = T\mathbf{x}$. Finden Sie die Darstellung C' von C in der neuen Basis.

Aufgabe 7. *Iteratives Lösen von Gleichungen*

Sei $y(x)$ eine reelle und analytische Funktion von x, die für $|x| \ll 1$ folgende Gleichung erfüllt:

$$\ln(x+1)^2 + \mathrm{e}^{y(x)} = 1 - y(x)\ .$$

(a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $y(0) = 0$ gilt.

(b) (4 Punkte) Lösen Sie die Gleichung für $y(x)$ iterativ, mittels einer Reihenentwicklung bis einschließlich $\mathcal{O}(x^2)$.

Aufgabe 8. *Fourier-Reihe von* $|\sin x|$

Skizzieren Sie die periodische Funktion $f(x) = |\sin x|$. Stellen Sie $f(x)$ durch eine Fourier-Reihe dar und berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten $\tilde{f}_n$ der $e^{i(\dots)nx}$-Basisfunktionen.

Hinweis: Die resultierende Fourier-Reihe lässt sich auch als Kosinus-Reihe darstellen, letztere wird aber hier nicht verlangt.

Aufgabe 9. *Differentialgleichungen*

Lösen Sie folgende Differentialgleichung:

$$y' - \frac{y^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0, \quad y(0) = 1,\ 0 \leq x < a, \quad 0 < a \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Für x-Integrale, die Faktoren der Form $\sqrt{a^2 - x^2}$ enthalten, empfiehlt sich die Substitution $x = a \sin t$.

Aufgabe 10. *Greensche Funktion*

(a) (3 Punkte) Betrachten Sie den unterdämpften harmonischen Oszillator ($\gamma < \Omega$) mit exponentiell abfallenden Antrieb,

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega^2 x = \theta(t)e^{-\gamma t}.$$

Konstruieren Sie explizit eine partikuläre Lösung $x_p(t)$ durch Berechnung eines Integrals, das die Faltung der Greenschen Funktion $\mathcal{G}(t)$ und der Inhomogenität enthält, wobei $\mathcal{G}(t)$ wie folgt lautet:

$$\mathcal{G}(t) = \frac{\theta(t)}{\Omega_r} \sin(\Omega_r t)e^{-\gamma t},$$

mit $\Omega_r = \sqrt{\Omega^2 - \gamma^2}$ und $\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$

(b) (2 Punkte) Überprüfen Sie, dass $\mathcal{G}(t)$ tatsächlich die Greensche Funktion für den unterdämpften harmonischen Oszillator ist, indem Sie (durch explizites Einsetzen) zeigen, dass $\mathcal{G}(t)$ folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\frac{d}{dt} + \Omega^2\right)\mathcal{G}(t) = \delta(t)\ .$$

Hinweis 1: Die Ableitung der θ-Funktion ist $\dot{\theta}(t) = \delta(t)$.
Hinweis 2: Für eine beliebige Funktion $f(t)$ gilt $\delta(t)f(t) = \delta(t)f(0)$. Falls also $f(t)$ die Eigenschaft $f(0) = 0$ hat, gilt somit $\delta(t)f(t) = 0$.

Aufgabe 11. *Satz von Stokes*

Betrachten Sie folgendes Vektorfeld in Kugelkoordinaten:

$$\mathbf{A} = A_\varphi \mathbf{e}_\varphi \,, \qquad \text{mit} \qquad A_\varphi = \gamma \frac{\sin\theta}{r^3} \,.$$

(a) (3 Punkte) Berechnen Sie explizit den Fluss $\Phi = \int_{\mathrm{HK}} \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$ von $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ durch die Halbkugel $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z > 0$. (Die Orientierung der Fläche sei durch die Vorgabe festgelegt, dass der Normalvektor für jedes Flächenelement $\delta\mathbf{S}$ "nach oben" zeige, d.h. eine positive z-Komponente habe.)

Hinweis: Für ein Vektorfeld in Kugelkoordinaten,

$$\mathbf{A}(r,\theta,\varphi) = A_r(r,\theta,\varphi)\,\mathbf{e}_r + A_\theta(r,\theta,\varphi)\,\mathbf{e}_\theta + A_\varphi(r,\theta,\varphi)\,\mathbf{e}_\varphi \,,$$

berechnet sich die Rotation wie folgt:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\Big[\partial_\theta\left(A_\varphi \sin\theta\right) - \partial_\varphi A_\theta\Big]\mathbf{e}_r + \left[\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi A_r - \frac{1}{r}\partial_r\left(rA_\varphi\right)\right]\mathbf{e}_\theta \,+ \\ + \frac{1}{r}\Big[\partial_r\left(rA_\theta\right) - \partial_\theta A_r\Big]\mathbf{e}_\varphi \,.\end{aligned}$$

(b) (2 Punkte) Verwenden Sie den Satz von Stokes um den Fluss Φ durch ein Linienintegral auszudrücken, und berechnen Sie dieses ebenfalls explizit.

Aufgabe 12. *Residuensatz*

Betrachten Sie die Funktion

$$h(z) = \frac{z}{(z^2 - iz + 2)(z + 9)^2}.$$

(a) (1,5 Punkte) Geben Sie alle Polstellen von $h(z)$ und die dazugehörigen Ordnungen an.

(b) (3,5 Punkte) Berechnen Sie jeweils die Integrale $\oint h(z)dz$ für folgende gegen den Uhrzeigersinn verlaufende geschlossene Konturen:

(1) einen Kreis mit Radius $R = 0.5$ um den Ursprung,

(2) einen Kreis mit Radius $R = 1$ um $z = -i$,

(3) einen Kreis mit Radius $R = 4$ um $z = -i$.