Musterlösung Nachholklausur

Aufgabe 1. *Integrale mit der δ-Funktion*

a)
$$I_a = \int_0^1 dx\delta(x-2\pi)\cos(x)\sin(3x) = 0,$$
da die Nullstelle der δ-Funktion außerhalb des Integrationsbereichs liegt.

b) Die Nullstelle der δ-Funktion liegt innerhalb des Integrationsbereichs:
$$I_b = \int_0^2 dx\delta(x-1)\left[\ln(x)+\cos(2\pi x)\right] = \ln(1)+\cos(2\pi) = 0+1 = 1.$$

c) Im Allgemeinen gilt $\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-y_i)}{|g'(y_i)|}$, wobei y_i die einfachen Nullstellen von $g(x)$ sind. Hier: $g(x) = x^2-4$, mit $y_1 = 2$ und $y_2 = -2$. Somit:
$$\delta(x^2-4) = \frac{1}{4}\delta(x-2) + \frac{1}{4}\delta(x+2)$$
$$I_c = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\delta(x^2-4)\mathrm{e}^{-x^2} = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-4} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-4} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4}$$

Aufgabe 2. *Diagonalisierung einer hermitischen* 3×3 *Matrix*

(a) Charakteristisches Polynom
$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & i \\ 0 & -i & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2-1] = (1-\lambda)\lambda(\lambda-2)$$

Daraus folgen die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_2 = 2$. Der Eigenvektor zu $\lambda_1 = 1$ lässt sich sofort ablesen: $\mathbf{u} = (1,0,0)^T$, da die Matrix in der ersten Zeile und Spalte bis auf das Diagonalelement nur 0-Einträge enthält. Die beiden anderen Eigenvektoren sind
$$M\mathbf{v} = 0 \quad\Rightarrow\quad v_1 = 0 \;\text{ und }\; v_2 + iv_3 = 0 \Rightarrow \mathbf{v} \propto \begin{pmatrix}0\\1\\i\end{pmatrix}$$
$$M\mathbf{w} = 2\mathbf{w} \quad\Rightarrow\quad w_1 = 0 \;\text{ und }\; w_2 + iw_3 = 2w_2 \Rightarrow \mathbf{w} \propto \begin{pmatrix}0\\1\\-i\end{pmatrix}$$

Die normierten Eigenvektoren sind somit
$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\i\end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-i\end{pmatrix}$$

(b) Die Transformationsmatrix S mit der Eigenschaft, dass $S^{-1}MS$ diagonal ist, hat die Eigenvektoren als Spaltenvektoren (Reihenfolge beliebig), und da die Eigenvektoren normiert sind, gilt $S^{-1} = S^\dagger$. Somit

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & i & -i \end{pmatrix}, \quad S^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{aligned} S^{-1}MS &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & i & -i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Matrix ist in der Tat diagonal in der neuen Basis.

Aufgabe 3. *Basistransformation in $\mathbb{E}^2$: Streckung und Drehung*

a) Inspektion der Skizze zeigt, dass $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ durch folgende Linearkombinationen von $\mathbf{v}'_1$ und $\mathbf{v}'_2$ ausgedrückt werden können:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}'_1 - \tfrac{1}{2}\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}'_1 t_{11} + \mathbf{v}'_2 t_{21} \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}'_1 + \tfrac{1}{2}\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}'_1 t_{12} + \mathbf{v}'_2 t_{22} \end{aligned}$$

Folglich:

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) T entspricht einer Streckung der $\mathbf{v}'_1$- und $\mathbf{v}'_2$-Achsen um $\sqrt{2}$ bzw. $1/\sqrt{2}$, gefolgt von einer Drehung um $\theta = -\pi/4$:

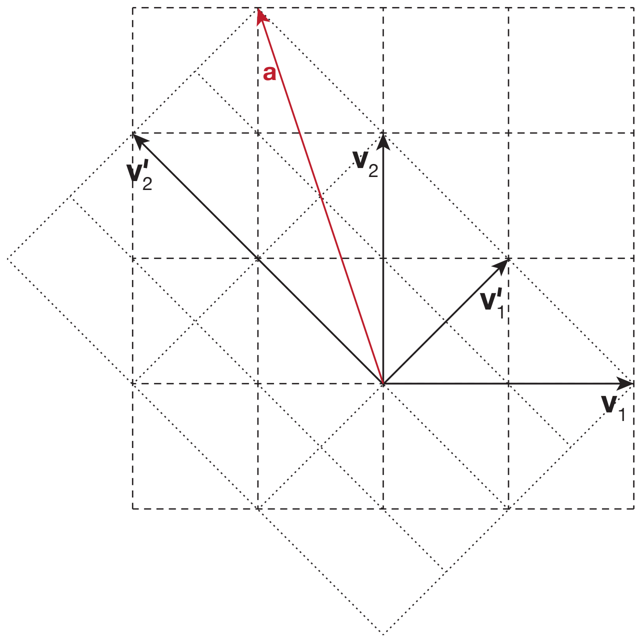
$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Check: $\quad SD = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \overset{\checkmark}{=} T$

c) Die Inverse einer 2×2-Matrix $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ lautet $M^{-1} = (\det M)^{-1} \left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & d \end{smallmatrix}\right)$. Somit:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

d)



Koordinatentransformation von Basis 2 zu Basis 1:

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}_i' x_i' = \mathbf{v}_j \underbrace{t_{ji}^{-1} x_i'}_{x_j} \equiv \mathbf{v}_j x_j \ .$$

$$\mathbf{x} = T^{-1}\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Somit gilt (offensichtlich konsistent mit Skizze):

$$\mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_2' \overset{\checkmark}{=} \mathbf{a} \overset{\checkmark}{=} -\tfrac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \tfrac{3}{2}\mathbf{v}_2$$

Aufgabe 4. *Linienintegral in kartesischen und krummlinigen Koordinaten*

(a)

$$\gamma_1 : \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \qquad t \in [0,1] \ , \qquad \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\int_{\gamma_1} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = \int_0^1 \mathrm{d}t\, \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \int_0^1 \mathrm{d}t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \int_0^1 \mathrm{d}t\ t = \frac{1}{2}$$

(b)

$$\gamma_2 : \mathbf{r}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{pmatrix} , \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \ , \qquad d_\theta \mathbf{r}(\theta) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} &= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\, (d_\theta \mathbf{r}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}(\theta)) = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin\theta \end{pmatrix} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\ \cos\theta \sin\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\ \frac{1}{2} \sin 2\theta = -\frac{1}{4} [\cos 2\theta]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(c) Die Linienintegrale in (a) und (b) haben denselben Wert, da das Vektorfeld $\mathbf{F}$ konservativ ist ($\nabla \times \mathbf{F} = 0$), sodass alle Linienintegrale mit denselben Anfangs- und Endpunkten denselben Wert haben.

Aufgabe 5. *Volumenintegral mit Zylinderkoordinaten*

Volumenelement in Zylinderkoordinaten: $\delta V = \rho\delta\rho\,\delta\phi\,\delta z$. Das Volumenintegral ist somit

$$\begin{aligned}
I = \int_G \mathrm{d}V \frac{z}{\rho} &= \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{z(1+\cos(\phi))} d\rho\,\rho\,\frac{z}{\rho} \\
&= \int_0^1 dz\, z \int_0^{2\pi} d\phi\, \rho\Big|_0^{z(1+\cos(\phi))} \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}z\, z^2 \int_0^{2\pi} d\phi\,(1+\cos(\phi)) \\
&= \frac{z^3}{3}\Big|_0^1 \,(\phi + \sin(\phi))|_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{3}(2\pi - 0 + 0 - 0) = \frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6. *Taylor-Entwicklung um $x_0 = 1$*

$$\begin{aligned}
& & f(x) &= \mathrm{e}^{-x}\ln(x), & &\Rightarrow \quad f(1) = 0 & (1)\\
d_t(1): & & f'(x) &= \mathrm{e}^{-x}\left(\frac{1}{x} - \ln x\right), & &\Rightarrow \quad f'(1) = \mathrm{e}^{-1} & (2)\\
d_t(2): & & f''(x) &= \mathrm{e}^{-x}\left(\ln x - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right), & &\Rightarrow \quad f''(1) = -3\mathrm{e}^{-1} & (3)\\
\text{Taylor-Reihe:} & & f(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 + \mathcal{O}\left((x-1)^3\right) & & & (4)\\
& & &= \mathrm{e}^{-1}(x-1) - \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-1}(x-1)^2 + \mathcal{O}(x-1)^3 & & & (5)
\end{aligned}$$

Aufgabe 7. *Iteratives Lösen einer Differentialgleichung für $\dot{x}$*

$$\begin{aligned}
& & \dot{x} + \sin t &= \frac{1}{\sqrt{x}}, & & x(0) = 1 & (6)\\
(6)_{t=0}: & & \dot{x}(0) + 0 &= \frac{1}{\sqrt{x(0)}} & &\Rightarrow \quad \dot{x}(0) = 1 & (7)\\
d_t(6): & & \ddot{x} + \cos t &= -\frac{1}{2}\frac{\dot{x}}{\sqrt{x}^3} & & & (8)\\
(8)_{t=0}: & & \ddot{x}(0) + 1 &= -\frac{1}{2}\frac{\dot{x}(0)}{\sqrt{x(0)}^3} = -\frac{1}{2} & &\Rightarrow \quad \ddot{x}(0) = -\frac{3}{2} & (9)\\
\text{Taylor-Reihe:} & & x(t) &= x(0) + \dot{x}(0)t + \frac{1}{2}\ddot{x}(0)t^2 + \mathcal{O}(t^3) & & & (10)\\
& & &= 1 + t - \frac{3}{4}t^2 + \mathcal{O}(t^3) & & & (11)
\end{aligned}$$

Aufgabe 8. *Fourier-Transformation von $te^{-\alpha|t|}$*

Integrationsintervall aufteilen:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} te^{-\alpha|t|}e^{i\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} te^{\alpha t}e^{i\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} te^{-\alpha t}e^{i\omega t}dt \\
&= -\int_{0}^{\infty} te^{-\alpha t}e^{-i\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} te^{-\alpha t}e^{i\omega t}dt,
\end{aligned}$$

wobei wir im ersten Integral $-t$ für t substituiert haben.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \tilde{f}(\omega) &= \int_{0}^{\infty} te^{-\alpha t}e^{i\omega t}dt - \text{k.k.} \\
&= \int_{0}^{\infty} te^{-(\alpha-i\omega)t}dt - \text{k.k.} \\
&= t\frac{1}{-(\alpha-i\omega)}e^{-(\alpha-i\omega)t}\Big|_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty} \frac{1}{-(\alpha-i\omega)}e^{-(\alpha-i\omega)t}dt - \text{k.k.}
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir partiell integriert. Da $\lim_{t\to\infty} te^{-(\alpha-i\omega)t} = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \tilde{f}(\omega) &= 0 - \frac{1}{(\alpha-i\omega)^2}e^{-(\alpha-i\omega)t}\Big|_{0}^{\infty} - \text{k.k.} \\
&= \frac{1}{(\alpha-i\omega)^2} - \text{k.k.} = \frac{1}{(\alpha-i\omega)^2} - \frac{1}{(\alpha+i\omega)^2} \\
&= \frac{(\alpha+i\omega)^2-(\alpha-i\omega)^2}{\left((\alpha-i\omega)(\alpha+i\omega)\right)^2} \\
&= \frac{4i\alpha\omega}{(\alpha^2+\omega^2)^2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 9. *Inhomogene lineare Differentialgleichung, Variation der Konstanten*

(a) Homogene Differentialgleichung: $\dot{x} + tx = 0$, mit $x(0) = 1$.
Ein möglicher Lösungsweg: Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -tx\ , \\
\int_1^x \frac{dx'}{x'} &= -\int_0^t dt'\,t'\ , \\
\ln x - \ln 1 &= -\frac{1}{2}t^2\ . \\
x_h(t) &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\ .
\end{aligned}$$

(b) Ansatz für partikuläre Lösung - Variation der Konstanten: $x_p = c(t)x_h(t)$, mit $c(0) = 1$.

Eingesetzt in inhomogene Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_h + t x_h &= \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \\
[\dot{c} - t]\, e^{-\frac{1}{2}t^2} + c e^{-\frac{1}{2}t^2} &= e^{-\frac{1}{2}t^2} \qquad \Rightarrow \quad \dot{c} = 1\,, \\
c(t) - c(0) &= \int_0^t dt'\, 1 = t \qquad \Rightarrow \quad c(t) = (t+1). \\
\text{Partikuläre Lösung:} \qquad x_p(t) &= (t+1) e^{-\frac{1}{2}t^2}\,. \\
\text{Check:} \qquad \dot{x} + t x &= [1 + (t+1)(-t) + t(t+1)]\, e^{-\frac{1}{2}t^2} \overset{\checkmark}{=} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,, \\
\text{und} \qquad x_p(0) &\overset{\checkmark}{=} 1\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 10. *Inhomogene lineare Differentialgleichung, Green'sche Funktion*

Zu lösende Differentialgleichung:

$$\dot{x} + x = 2t. \tag{12}$$

(a) Die entsprechende Green'sche Funktion erfüllt per Definition:

$$\dot{\mathcal{G}}(t) + \mathcal{G}(t) = \delta(t)\,. \tag{13}$$

(b) Fourier-Transformiere mittels

$$\mathcal{G}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \tilde{\mathcal{G}}(\omega) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,, \qquad \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, (\omega) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,. \tag{14}$$

Gl. (14) eingesetzt in (13) liefert

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \underbrace{\left(\frac{d}{dt} + 1\right)}_{-\mathrm{i}\omega + 1} \tilde{\mathcal{G}}(\omega) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,, \tag{15}$$

$$\Rightarrow \text{Green'sche Funktion:} \qquad \tilde{\mathcal{G}}(\omega) = \frac{1}{1 - \mathrm{i}\omega}\,. \tag{16}$$

Die Green'sche Funktion $\mathcal{G}(t)$ erhalten wir durch Fourier-Rücktransformation [Gl. (16) eingesetzt in Gl. (14)]:

$$\mathcal{G}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{1 - \mathrm{i}\omega} = \mathrm{e}^{-t}\theta(t)\,.$$

(c) Eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung (12) lässt sich mittels $\mathcal{G}(t)$ wie folgt konstruieren:

$$x_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{t}\, \mathcal{G}\left(t - \tilde{t}\right) 2\tilde{t} = \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{t}\, \mathrm{e}^{-\left(t - \tilde{t}\right)} \theta\left(t - \tilde{t}\right) 2\tilde{t}$$

Durch die θ-Funktion trägt der Integrand nur für die Werte von $\tilde{t}$ bei, für die $\tilde{t} \leq t$. Dies kann geschrieben werden als

$$x(t) = 2\mathrm{e}^{-t} \int\limits_{-\infty}^{t} d\tilde{t}\; \tilde{t}\mathrm{e}^{\tilde{t}} = 2\mathrm{e}^{-t} \left(\tilde{t}\mathrm{e}^{\tilde{t}} \Big|_{-\infty}^{t} - \int\limits_{-\infty}^{t} d\tilde{t}\mathrm{e}^{\tilde{t}} \right) \quad \text{partielle Integration}$$

$$= 2\mathrm{e}^{-t} \left(t\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{\tilde{t}} \Big|_{-\infty}^{t} \right) = 2\mathrm{e}^{-t} \left(t\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{t} \right) = 2(t-1).$$

Check: $\quad \dot{x}_p + x_p = 2 + 2(t-1) \stackrel{\checkmark}{=} 2t$.

Aufgabe 11. *Fluß des Feldes einer Punktladung durch eine Kugelschale – Satz von Gauß*

a) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{|r|^3}\mathbf{r} = r^{-2}\mathbf{e}_r$.

Oberflächenelement einer Kugel: $\quad \delta\mathbf{S} = \mathbf{e}_r\, r^2 \sin\theta\delta\theta\delta\varphi$

$$\Phi_K = \int_{O_K} \mathrm{d}\mathbf{S}\cdot\mathbf{F} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\, r^2 \sin\theta\, \frac{1}{r^2} = 4\pi$$

b) Der Fluss durch die Oberfläche der Kugelschale S ist die Differenz der Flüsse durch die äussere und innere Kugeln, die S begrenzen:

$$\Phi_S = \Phi_K|_{R=R_2} - \Phi_K|_{R=R_1} = 4\pi - 4\pi = 0\ .$$

c)

$$\Phi_S = \int_{O_S} \mathrm{d}\mathbf{S}\cdot\mathbf{F} \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_S \mathrm{d}V\nabla\cdot\mathbf{F}\ .$$

Kugelkoordinaten: $\mathbf{F} = F_r\mathbf{e}_r + F_\theta\mathbf{e}_\theta + F_\phi\mathbf{e}_\phi$, mit $F_r = r^{-2}$, $F_\theta = F_\phi = 0$. Somit:

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2 r^{-2}\right) = 0$$

Kartesisch: $\mathbf{F} = \sum\limits_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \frac{x_i}{r^3}$, mit $r = \left[\sum_{i=1}^3 x_i^2\right]^{1/2}$. Somit:

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{3} \partial_i \frac{x_i}{r^3} = \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{1}{r^3} - x_i \frac{3}{2}\frac{2x_i}{r^5}\right] = \frac{3}{r^3} - 3\frac{r^2}{r^5} = 0\ .$$

Folglich gilt $\Phi_S = 0$, konsistent mit dem Ergebnis aus (b).

Aufgabe 12. *Residuensatz*

(a) Die Pole von f sind die Nullstellen des Nenners $(z-2)(z+1)^2$; somit hat f einen Pol erster Ordnung bei $z_1 = 2$, und einen Pol zweiter Ordnung bei $z_2 = -1$.

(b) Konturen:
γ_1: Kreis um $z = 2$, Radius 1
γ_2: Kreis um $z = -1$, Radius 1
γ_3: Kreis um $z = 0$, Radius 4

γ_1 umschließt den Pol erster Ordnung bei $z_2 = 2$, mit Residuum:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f,2) &= \lim_{z\to 2} \frac{4z(z-2)}{(z-2)(z+1)^2} = \lim_{z\to 2} \frac{4z}{(z+1)^2} = \frac{8}{9} \\
\text{Somit:} \qquad \oint_{\gamma_1} dz\, f(z) &= 2\pi i\, \mathrm{Res}(f,2) = \frac{16\pi i}{9}
\end{aligned}$$

γ_2 umschließt den Pol zweiter Ordnung bei $z_2 = -1$, mit Residuum:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f,-1) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to -1} \left[\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} \Big((z+1)^2 f(z) \Big) \right] \\
&= \lim_{z\to -1} \left[\frac{d}{dz} \frac{4z}{z-2} \right] = \lim_{z\to -1} \frac{4(z-2)-4z}{(z-2)^2} = -\frac{8}{9} \\
\text{Somit:} \qquad \oint_{\gamma_2} dz\, f(z) &= 2\pi i\, \mathrm{Res}(f,-1) = -\frac{16\pi i}{9}
\end{aligned}$$

γ_3 umschließt beide Pole, somit ist das Konturintegral gleich der Summe beider oben berechneten Integrale:

$$\oint_{\gamma_3} dz\, f(z) = 2\pi i\, \left[\mathrm{Res}(f,2) + \mathrm{Res}(f,-1) \right] = 0 \,.$$