T0: Nachholklausur

Mittwoch, 03.04.2013

Nachname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

ECTS-Punkte: 9 / 6
(zutreffendes umkreisen)

Übungsgruppe:

- Jede Aufgabe ist auf einem *eigenen Blatt* zu lösen.
- **Extra Blätter:**
  - sind auf Nachfrage von der aufsichtführenden Person erhältlich;
  - sollten (auf *jedem* Blatt) mit Ihrem *Namen* und der *Nummer der darauf bearbeiteten Aufgabe* versehen werden;
  - sollten oben links nicht beschrieben werden, um Platz zum Tackern lassen;
  - sollten bei Abgabe *korrekt sortiert* zwischen die anderen Aufgaben gelegt werden – lösen Sie dazu vor Abgabe die Tackerklammer der Klausurangabe, bringen Sie alle Blättern (inklusive Extrablätter) in die richtige Reihenfolge, und lassen Sie das ganze Paket von der aufsichtführenden Person zusammentackern.
- Achten Sie darauf, dass *alle* relevanten Blätter abgegeben werden. Fehlende Aufgaben werden mit null Punkten bewertet.
- Es sind *keine Hilfsmittel* erlaubt.
- **Bearbeitungszeit, Gesamtpunktzahl:**
  Bachelor (9 ECTS-Punkte): 180 min für 12 Aufgaben, insgesamt 60 Punkte
  Lehramt und Nebenfach (6 ECTS-Punkte): 120 min für 8 Aufgaben, ingesamt 40 Punkte
- **Für Lehramt und Nebenfach:** Es dürfen beliebige 8 der 12 Aufgaben bearbeitet werden; die ersten 8 befassen sich mit dem für Lehramt und Nebenfach relevanten Stoff. Werden mehr als 8 Aufgaben bearbeitet, dann wird die Gesamtpunktzahl aus der Summe der besten 8 gebildet.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Summe
Punktzahl	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	
Erreichte Punktzahl													
Korrektor													

Aufgabe 1. *Integrale mit der δ-Funktion*

Lösen Sie die folgenden Integrale

(a)

$$I_a = \int_0^1 dx \delta(x - 2\pi) \cos(x) \sin(3x)$$

(b)

$$I_b = \int_0^2 dx \delta(x - 1) \left[\ln(x) + \cos(2\pi x)\right]$$

(c)

$$I_c = \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x^2 - 4) \mathrm{e}^{-x^2}$$

Aufgabe 2. *Diagonalisierung einer hermitischen* 3×3 *Matrix*

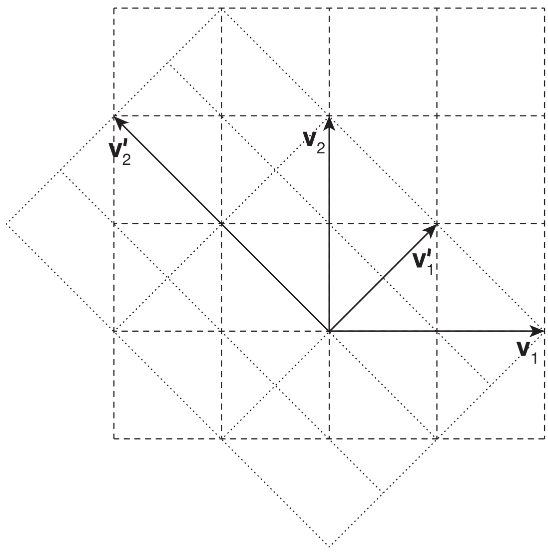
(a) Finden Sie die Eigenwerte und normierten Eigenvektoren für folgende Matrix:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Konstruieren Sie mit den Ergebnissen aus (a) eine diagonalisierende Ähnlichkeitstransformation S für M, sowie deren Inverse, S^{-1}.

(c) Überprüfen Sie durch explizites Ausmultiplizieren, dass die in (b) konstruierte Ähnlichkeitstransformation S die Matrix M wirklich diagonalisiert.

Aufgabe 3. *Basistransformation in $\mathbb{E}^2$: Streckung und Drehung*



a) Die Skizze zeigt zwei Basen für den Euklidischen Raum $\mathbb{E}^2$: Basis 1 $= \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ und Basis 2 $= \{\mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2'\}$. Finden Sie die durch $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_i' t_{ij}$ definierte Basistransformation T von Basis 2 zu Basis 1 explizit.

b) Diese Basistransformation läßt sich als Kombination $T = SD$ einer Streckung S gefolgt von einer Drehung D schreiben. Finden Sie S und D explizit.

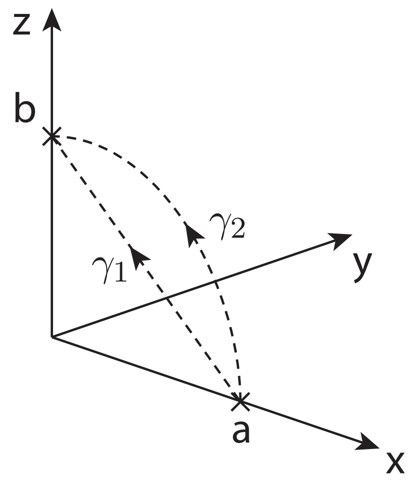
c) Finden Sie T^{-1}.

d) Gegeben sei der Euklidische Vektor $\mathbf{a} = \mathbf{v}_i' x_i' \in \mathbb{E}^2$, mit Koordinatenvektor $\mathbf{x}' = (1,1)^T$ bezüglich der Basis 2. Zeichnen Sie $\mathbf{a}$ in die Skizze ein. Berechnen Sie mittels einer Basistransformation den Koordinatenvektor $\mathbf{x}$ von $\mathbf{a}$ bezüglich der Basis 1. Vergewissern Sie sich mittels der Skizze, dass die Koordinatenvektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}'$ denselben Euklidischen Vektor $\mathbf{a}$ darstellen.

Aufgabe 4. *Linienintegral in Cartesischen und krummlinigen Koordinaten*

Gegeben Sei das Vektorfeld

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$



Berechen Sie explizit das Linienintegral $\int \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}$ von $\mathbf{a} = (1, 0, 0)^T$ nach $\mathbf{b} = (0, 0, 1)^T$ entlang den folgenden zwei Wegen:

(a) γ_1: eine gerade Linie;

(b) γ_2: ein Segment eines Kreises mit Radius $R = 1$ um den Ursprung.

(c) Gibt es einen Zusammenhang zwischen den Ergebnissen in (a) und (b)? Erläutern Sie!

Aufgabe 5. *Volumenintegral mit Zylinderkoordinaten*

Berechnen Sie in Zylinderkoordinaten das Volumenintegral

$$I = \int_G \mathrm{d}V \, \frac{z}{\rho}$$

über dem Gebiet $G = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq z \leq 1,\, 0 \leq \phi \leq 2\pi,\, \rho \leq z(1 + \cos(\phi))\}$.

Aufgabe 6. *Taylor-Entwicklung um $x_0 = 1$*

Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} \ln(x)$$

um $x_0 = 1$ bis einschließlich der Ordnung $\mathcal{O}(x - x_0)^2$.

Aufgabe 7. *Iteratives Lösen einer Differentialgleichung für $\dot{x}$*

Lösen Sie folgende Differentialgleichung für die Funktion $x(t)$ iterativ mittels einer Reihenentwicklung für kleine t, bis einschließlich der 2.Ordnung:

$$\dot{x} + \sin t = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad , \qquad x(0) = 1 \; .$$

Aufgabe 8. *Fourier-Transformation von* $te^{-\alpha|t|}$

Berechnen Sie die Fourier-Transformierte

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t) e^{i\omega t}$$

der Funktion $f(t) = te^{-\alpha|t|}$, wobei $\alpha > 0$ eine positive Konstante ist.

Aufgabe 9. *Inhomogene lineare Differentialgleichung, Variation der Konstanten*

Die Funktion $x(t)$ erfülle die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$\dot{x} + tx = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}, \qquad \text{mit Anfangsbedingung} \quad x(0) = 1. \tag{1}$$

(a) Finden Sie die Lösung $x_h(t)$ der entsprechenden homogenen Differentialgleichung.

(b) Finden Sie die partikuläre Lösung $x_p(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung (1) mittels Variation der Konstanten.

Aufgabe 10. *Inhomogene lineare Differentialgleichung, Green'sche Funktion*

Die Funktion $x(t)$ erfülle die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$\dot{x} + x = 2t\ . \tag{2}$$

(a) Wie lautet die definierende Gleichung für die entsprechende Green'sche Funktion $\mathcal{G}(t)$?

(b) Finden Sie $\mathcal{G}(t)$, indem Sie die in (a) angegebene Gleichung Fourier-transformieren mittels $\mathcal{G}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \tilde{\mathcal{G}}(\omega) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, dann $\tilde{\mathcal{G}}(\omega)$ bestimmen und schließlich rücktransformieren.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis folgendes Integral verwenden (gilt für eine beliebige positive Konstante a):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{a - i\omega} = e^{-at}\theta(t), \qquad \text{wobei} \quad \theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}\ .$$

(c) Finden Sie nun mittels $\mathcal{G}(t)$ eine partikuläre Lösung $x_p(t)$ der Differentialgleichung (2).

Aufgabe 11. *Fluß des Feldes einer Punktladung durch eine Kugelschale – Satz von Gauß*

Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^3}\mathbf{r} = \frac{1}{r^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \text{mit } \mathbf{r} = (x, y, z)^T \neq \mathbf{0}, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ .$$

(a) Berechnen sie den Fluss $\Phi_K = \int_{O_K} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}$ durch die Oberfäche O_K einer am Ursprung zentrierten Kugel K mit Radius $R > 0$:

$$K = \{\mathbf{r} \,|\, r < R\}\ .$$

(b) Berechnen Sie [mittels des Ergebnisses von (a)] den Fluss $\Phi_S = \int_{O_S} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}$ durch die Oberfläche O_S einer am Ursprung zentrierten Kugelschale S, die inneren Radius $R_1 > 0$ und äusseren Radius R_2 hat:

$$S = \{\mathbf{r} \,|\, R_1 \leq r \leq R_2\}\ .$$

(c) Berechnen Sie den in (b) definierten Fluss Φ_S mittels dem Satz von Gauß. Berechnen Sie die dafür benötigte Divergenz von $\mathbf{F}$ auf zwei Weisen: erstens in Kugelkoordinaten, zweitens in kartesischen Koordinaten. Hinweis: für $\mathbf{F} = F_r\mathbf{e}_r + F_\theta\mathbf{e}_\theta + F_\phi\mathbf{e}_\phi$ gilt:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}$$

Aufgabe 12. *Residuensatz*

Betrachten Sie die Funktion

$$f(z) = \frac{4z}{(z-2)(z+1)^2}.$$

(a) (1 Punkt) Geben Sie alle Polstellen von $f(z)$ und die dazugehörigen Ordnungen an.

(b) (4 Punkte) Berechnen Sie jeweils die Integrale $\oint f(z)dz$ für folgende gegen den Uhrzeigersinn verlaufende geschlossene Konturen:

(1) einen Kreis mit Radius $R = 1$ um $z = 2$;

(2) einen Kreis mit Radius $R = 1$ um $z = -1$;

(3) einen Kreis mit Radius $R = 4$ um den Ursprung.

Hinweis: Für eine analytische Funktion $f(z)$ mit einem Pol m-ter Ordnung bei z_0 ist das entsprechende Residuum gegeben durch:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \Big((z-z_0)^m f(z) \Big) \right] \qquad (\text{mit } 0! = 1).$$