Musterlösung Probeklausur

Aufgabe 1. *Wegintegral und Existenz von Potentialen*

Wir berechnen das Wegintegral des Feldes

$$\vec{G}(\vec{r}) = (1/y, 1/z, 1/x)$$

entlang der Strecke zwischen den Punkten $A = (1, 1, 1)$ und $B = (2, 4, 8)$.
Eine mögliche Parametrisierung, sodass $\vec{r}(0) = A$ und $\vec{r}(1) = B$ und die Kurve die Strecke durchläuft, ist

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) & = & 1+t \\ y(t) & = & 1+3t \\ z(t) & = & 1+7t \end{array}\right\} t \in [0,1] \qquad \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich für das Wegintegral

$$\begin{aligned} W = \int_0^1 dt\, \vec{G}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} &= \int_0^1 dt \begin{pmatrix} 1/(1+3t) \\ 1/(1+7t) \\ 1/(1+t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &= \int_0^1 dt \left(\frac{1}{1+3t} + \frac{3}{1+7t} + \frac{7}{1+1t} \right) \\ &= \frac{1}{3}\ln(1+3t) + \frac{3}{7}\ln(1+7t) + 7\ln(1+t) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3}\ln(4) + \frac{3}{7}\ln(8) + 7\ln(2) \\ &= \frac{2}{3}\ln(2) + \frac{9}{7}\ln(2) + 7\ln(2) = \frac{188}{21}\ln(2) \end{aligned}$$

Eine Darstellung von $\vec{G}(r)$ als Gradientenfeld ist nicht möglich!

Beweis:
Für jedes Gradientenfeld gilt notwendigerweise $\partial_i G_j = \partial_j G_i$.
Ist dies hier (für irgendeine der Möglichkeiten) nicht erfüllt, kann $\vec{G}$ kein Gradientenfeld sein, z.B.

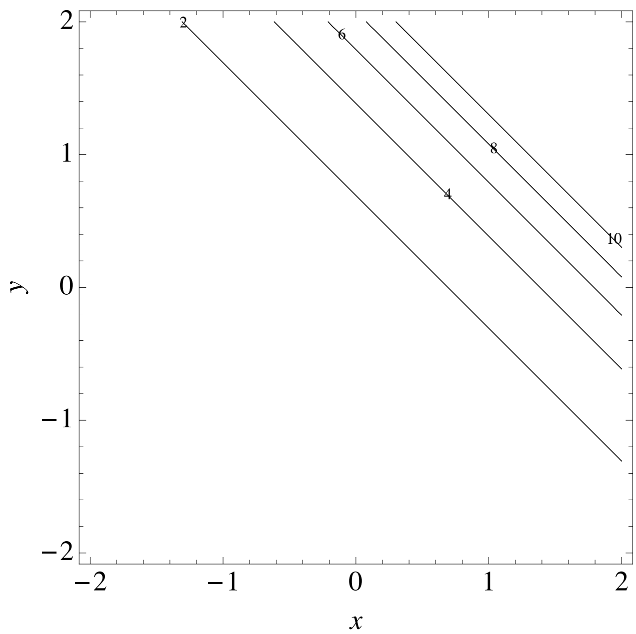
$$\begin{array}{rclcl} \partial_x G_y & = & \partial_x \frac{1}{z} & = & 0 \\ \partial_y G_x & = & \partial_y \frac{1}{y} & = & \frac{-1}{y^2} \quad \neq 0 \end{array}$$

Aufgabe 2. *Partielle Ableitungen, Gradient*

a) Partielle Ableitungen:

$$\partial_x f(\mathbf{r}) = \frac{e^{\frac{x+y}{z}}}{z}$$
$$\partial_y f(\mathbf{r}) = \frac{e^{\frac{x+y}{z}}}{z} = \partial_x f(\mathbf{r})$$
$$\partial_z f(\mathbf{r}) = -\frac{e^{\frac{x+y}{z}}(x+y)}{z^2}$$
$$\partial^2_{y,x} f(\mathbf{r}) = \partial^2_{x,y} f(\mathbf{r}) = \frac{e^{\frac{x+y}{z}}}{z^2}$$
$$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} = \frac{e^{\frac{x+y}{z}}}{z} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{x+y}{z} \end{pmatrix}$$

b) Die Richtung maximaler Steigung ist gegeben durch den Gradientenvektor, $\nabla h = e^{x+y}(1,1)^T$; der dazu parallele Einheitsvektor lautet $\hat{\mathbf{n}}_\parallel = \nabla h / \|\nabla h\| = (1,1)^T/\sqrt{2}$. Die Konturlinien verlaufen senkrecht zum Gradientenvektor ∇h, also entlang des Einheitsvektors $\hat{\mathbf{n}}_\perp = (-1,1)^T/\sqrt{2}$. Diese Vektoren sind beide konstant, also unabhängig von $\mathbf{r}$. Die Konturlinie auf Höhe $h(x,y) \equiv H(>0)$ wird definiert durch die Gleichung $H \equiv e^{x+y}$. Für gegebenes x lösen wir auf nach y und finden: $y = \ln(H) - x$. Die Konturlinien sind also durch diese Gleichung gegebene Geraden, die mit zunehmenden x und y dichter werden, siehe Skizze:



Aufgabe 3. *Krummlinige Koordinaten*

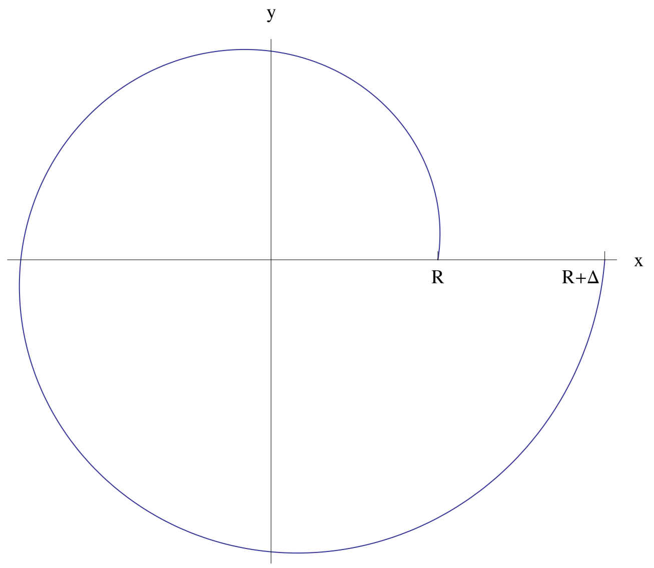
(a) *Einheitsvektoren*

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varrho} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \qquad |\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varrho}| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1 \qquad \Rightarrow \hat{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\varrho\sin\varphi \\ \varrho\cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad |\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}| = \sqrt{\varrho^2\sin^2\varphi + \varrho^2\cos^2\varphi} = \varrho \qquad \Rightarrow \hat{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Wegelement:

$$\mathrm{d}\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varrho}\mathrm{d}\varrho + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi = \hat{e}_\varrho \mathrm{d}\varrho + \varrho\hat{e}_\varphi \mathrm{d}\varphi$$

(b) *Skizze*



Wegintegral
Orthonormiertheit: $\hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_\varrho = 0, \hat{e}_\varphi \cdot \hat{e}_\varphi = 1$

$$\int_W \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \int_W \hat{e}_\varphi(\hat{e}_\varrho\mathrm{d}\varrho + \varrho\hat{e}_\varphi\mathrm{d}\varphi) = \int_W \rho\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} (R + \frac{1}{2\pi}\Delta\varphi)\mathrm{d}\varphi$$
$$= \left[R\varphi + \frac{1}{4\pi}\Delta\varphi^2\right]_0^{2\pi} = 2\pi R + \pi\Delta$$

Aufgabe 4. *Volumenintegral*

(a) Es bietet sich an, Kugelkoordinaten zu benutzen:

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \\ dV &= r^2\sin\theta dr d\theta d\phi \end{aligned}$$

Damit ist $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq 2$. Außerdem gilt $x^2 + y^2 = r^2\sin^2\theta$ und somit $z \geq \sqrt{3r^2\sin^2\theta} = \sqrt{3}r\sin\theta$. Zusammen mit $z = r\cos\theta$ folgt daraus $\tan\theta \leq 1/\sqrt{3} \Rightarrow \theta \leq \pi/6$.

(b) Somit können wir das Volumenintegral aufstellen

$$\begin{aligned}
V &= \int dV = \int_0^2 dr \int_0^{\pi/6} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin\theta \\
&= \frac{1}{3} r^3 \bigg|_0^2 \cdot (-\cos\theta)|_0^{\pi/6} \cdot 2\pi \\
&= \frac{8}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) 2\pi = \frac{8\pi(2-\sqrt{3})}{3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5. *Basistransformation*

(a) Für $\theta = \frac{\pi}{4}$ gilt $\cos\theta = \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} =: s$.

$$A = \begin{pmatrix} s & -s \\ s & s \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} 3s & -\frac{2}{3}s \\ 3s & \frac{2}{3}s \end{pmatrix} = AB \neq BA = \begin{pmatrix} 3s & -3s \\ \frac{2}{3}s & \frac{2}{3}s \end{pmatrix} \tag{2}$$

(b)

$$\mathbf{y} = BA\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3s & -3s \\ \frac{2}{3}s & \frac{2}{3}s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3s \\ 2s \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\mathbf{y} = D\mathbf{x}' \;\Rightarrow \mathbf{x}' = D^{-1}\mathbf{y}$$

$$\begin{aligned}
D &= BAB \quad (4) \\
\Rightarrow D^{-1} &= B^{-1}A^{-1}B^{-1} \quad (5) \\
\mathbf{x}' &= D^{-1}\mathbf{y} = B^{-1}A^{-1}B^{-1}BAx \quad (6) \\
&= B^{-1}x = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 3 \end{pmatrix} \quad (7)
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{x}}' &= T\mathbf{x}' = AB\mathbf{x}' = \quad (8) \\
&= \begin{pmatrix} 3s & -\frac{2}{3}s \\ 3s & \frac{2}{3}s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ 3s \end{pmatrix} \quad (9) \\
\tilde{D} &= TDT^{-1} = ABBABB^{-1}A^{-1} = ABB \quad (10) \\
&= \begin{pmatrix} 3s & -\frac{2}{3}s \\ 3s & \frac{2}{3}s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9s & -\frac{4}{9}s \\ 9s & \frac{4}{9}s \end{pmatrix} \quad (11)
\end{aligned}$$

Aufgabe 6. *Matrixrechnung*

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda\mathbb{1}) &= \begin{vmatrix} 1+i-\lambda & 1 & 2-i \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1+i-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)+(2-i)+(1+i-\lambda)-(3-\lambda) \\
&= (1+i-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda),
\end{aligned}$$

da sich die letzten drei Terme kürzen.

$$\Rightarrow\ \lambda_1 = 1+i, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3$$

Eigenvektoren:

$$A\vec{v} = \lambda_1\vec{v}: \begin{pmatrix} 1+i & 1 & 2-i \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+i)v_1 \\ (1+i)v_2 \\ (1+i)v_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow v_2+(2-i)v_3 &= 0 \\
v_1+(1-i)v_2-v_3 &= 0 \\
v_2+(2-i)v_3 &= 0
\end{aligned}$$

Eine Lösung dieses Gleichungssystems ist

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2-3i \\ -2+i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{w} = \lambda_2\vec{w}: \begin{pmatrix} 1+i & 1 & 2-i \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2w_1 \\ 2w_2 \\ 2w_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow (-1+i)w_1+w_2+(2-i)w_3 &= 0 \\
w_1-w_3 &= 0 \Rightarrow w_1 = w_3 \\
w_2+w_3 &= 0 \Rightarrow w_2 = -w_3
\end{aligned}$$

Eine Lösung dieses Gleichungssystems ist

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{u} = \lambda_3\vec{u}: \begin{pmatrix} 1+i & 1 & 2-i \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u_1 \\ 3u_2 \\ 3u_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow (-2+i)u_1 + u_2 + (2-i)u_3 &= 0 \\
u_1 - u_2 - u_3 &= 0 \Rightarrow u_1 = u_2 + u_3 \\
u_2 &= 0
\end{aligned}$$

Eine Lösung dieses Gleichungssystems ist

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7. *Taylorreihen*

(a) *Taylorentwicklung*
Ableitungen:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{\sqrt{1-2x}} && \rightsquigarrow f(0) = 0 \\
f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-2x}} - \frac{1}{2}\frac{x}{(1-2x)^{3/2}}(-2) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}} + \frac{x}{(1-2x)^{3/2}} && \rightsquigarrow f'(0) = 1 \\
f''(x) &= -\frac{1}{2}\frac{-2}{(1-2x)^{3/2}} + \frac{1}{(1-2x)3/2} - \frac{3}{2}\frac{x(-2)}{(1-2x)^{5/2}} && \rightsquigarrow f''(0) = 2
\end{aligned}$$

Taylorentwicklung:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{1}{2}f''(0)\cdot x^2 + \mathcal{O}(x^3) \\
&= x + x^2 + \mathcal{O}(x^3)
\end{aligned}$$

(b) *Iterative Lösung*
Ansatz: $x(\varepsilon) = x_0 + x_1\cdot\varepsilon + x_2\cdot\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$
Entwicklungen:

$$\begin{aligned}
x(\varepsilon)^3 &= {x_0}^3 + 3{x_0}^2x_1\cdot\varepsilon + (3x_0{x_1}^2 + 3{x_0}^2x_2)\cdot\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\
e^{x(\varepsilon)} &= e^{x_0} + e^{x_0}x_1\cdot\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

Eingesetzt:

$${x_0}^3 + 3{x_0}^2x_1\cdot\varepsilon + 3(x_0{x_1}^2 + {x_0}^2x_2)\cdot\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) = 1 + e^{x_0}\cdot\varepsilon + x_1e^{x_0}\cdot\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned}
{x_0}^3 &= 1 && \rightsquigarrow x_0 = 1 \\
3{x_0}^2x_1 &= e^{x_0} && \rightsquigarrow x_1 = \frac{e}{3} \\
3(x_0{x_1}^2 + {x_0}^2x_2) &= x_1e^{x_0} && \rightsquigarrow x_2 = 0
\end{aligned}$$

Iterative Lösung:

$$x(\varepsilon) \approx 1 + \frac{e}{3}\cdot\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Aufgabe 8. *Fourier-Reihen*

Diese Funktion ist symmetrisch, also kommen nur Kosinus-Terme vor. Die Periode ist $L = 2\pi$, also $k = \frac{2\pi n}{L} = n$.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f_2(x)\cos(nx)$$

Koeffizienten berechnen:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f_2(x) = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} dx\, 2x + \int_{0}^{\pi} dx\,(-2x)\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[x^2\Big|_{-\pi}^{0} - x^2\Big|_{0}^{\pi}\right] = \frac{1}{\pi}\left[-\pi^2 - \pi^2\right] = -2\pi \\
a_{n\neq 0} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f_2(x)\cos(nx) \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} dx\, 2x\cos(nx) + \int_{0}^{\pi} dx\,(-2x)\cos(nx)\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2x}{n}\sin(nx)\Big|_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0} dx\,\frac{2}{n}\sin(nx) - \frac{2x}{n}\sin(nx)\Big|_{0}^{\pi} + \int_{0}^{\pi} dx\,\frac{2}{n}\sin(nx)\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{n^2}\cos(nx)\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{2}{n^2}\cos(nx)\Big|_{0}^{\pi}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{n^2}\left(1-(-1)^n\right) - \frac{2}{n^2}\left((-1)^n - 1\right)\right] = \frac{4}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right) \\
\Longrightarrow a_{n\neq 0} &= \begin{cases} 0 & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ \frac{8}{\pi n^2} & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

Hier wurde partiell integriert und $\sin(0) = \sin(\pm n\pi) = 0$, $\cos(\pm n\pi) = (-1)^n$ wurde verwendet. Fourier-Reihe:

$$f_2(x) = -\pi + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(2m+1)^2}\cos((2m+1)x)$$