http://homepages.physik.uni-muenchen.de/~vondelft/Lehre/12t0/

Probeklausur

Mittwoch, 16.01.2013

Name:

Matrikelnummer:

- Jede Aufgabe ist auf *getrennten Blättern* zu lösen.
- Bitte versehen Sie jedes extra Blatt mit ihrem *Namen* und der *Nummer der darauf bearbeiteten Aufgabe.*
- Bitte auf allen Blättern oben links Platz zum Tackern lassen.
- Es sind *keine Hilfsmittel* erlaubt.
- Bearbeitungszeit: 105 min

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Maximale Punktzahl	5	5	5	5	5	5	5	5	40
Erreichte Punktzahl									

Viel Erfolg!

Aufgabe 1. *Wegintegral und Existenz von Potentialen*

Berechnen Sie das Wegintegral des Vektorfelds $\vec{G}(\vec{r}) = (1/y, 1/z, 1/x)$ entlang der Strecke die die Punkte $A = (1, 1, 1)$ und $B = (2, 4, 8)$ verbindet. Kann man dieses Vektorfeld als Gradient eines Skalarfeldes darstellen? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 2. *Partielle Ableitungen, Gradient*

(a) Berechnen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = e^{\frac{x+y}{z}}$ alle partiellen Ableitungen erster Ordnung, die gemischte partielle Ableitung $\partial^2_{x,y} f(x, y, z)$, sowie den Gradienten.

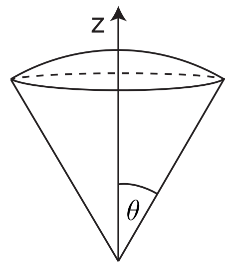
(b) Betrachten Sie nun die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x, y) = f(x, y, 1) = e^{x+y}$. In welche Richtung steigt diese Funktion am steilsten an? In welche Richtung verlaufen die Konturlinien? Finden Sie eine Gleichung für die Konturlinie auf Höhe $h(x, y) = H(> 0)$ und skizzieren Sie einen Konturplot der Funktion.

Aufgabe 3. *Krummlinige Koordinaten*

(a) Der Ortsvektor in Polarkoordinaten lautet $\vec{r} = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$. Berechnen Sie die dazugehörigen Einheitsvektoren $\hat{e}_\rho$ und $\hat{e}_\varphi$. Zeigen Sie, dass das Wegelement in Polarkoordinaten die Form $d\vec{r} = d\rho \hat{e}_\rho + \rho d\varphi \hat{e}_\varphi$ hat.

(b) Sei nun $\vec{F} = \hat{e}_\varphi$ ein zweidimensionales Vektorfeld gegeben in Polarkoordinaten und $W = \{\vec{r}(\rho, \varphi);\ \rho = R + \frac{\varphi}{2\pi}\Delta,\ \varphi \in [0, 2\pi]\}$ ein Spiralweg, wobei R und Δ positive Konstanten sind. Skizzieren Sie den Spiralweg W und berechnen Sie das Wegintegral $\int_W \vec{F} \cdot d\vec{r}$ des Feldes $\vec{F}$ entlang des Spiralwegs.

Aufgabe 4. *Volumenintegral*



Betrachten Sie die "Eistüte" die von unten durch den Kegel mit $z \geq \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ und von oben durch die Kugel mit $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ begrenzt wird.

(a) Zeigen Sie, dass der halbe Öffnungswinkel des Kegels $\theta = \pi/6$ beträgt. *Hinweis:* Es gilt $\sin(\pi/6) = 1/2$ und $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$.

(b) Berechnen Sie das Volumen der "Eistüte".

Aufgabe 5. *Basistransformation*

Betrachen Sie die folgende Basistransformationen in $\mathbb{R}^2$, mit Standardbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

$A:$ Rotation um den Winkel $\theta = \frac{\pi}{4}$.

$B:$ Streckung der Achse 1 um den Faktor $s_1 = 3$ und der Achse 2 um den Faktor $s_2 = \frac{2}{3}$.

(a) Finden Sie die Matrixdarstellungen (bezüglich der Standardbasis) von A, B. Kommutieren diese Transformationen miteinander (d.h., gilt $AB = BA$)?

(b) Was ist das Bild $\mathbf{y} = BA\mathbf{x}$ des Vektors $\mathbf{x} = (1, 2)^T$ unter der Transformation BA? Finden Sie den Vektor $\mathbf{x}'$, der unter der Verknüpfung der Abbildungen, $D = BAB$, auf $\mathbf{y}$ abgebildet wird. [Hinweis: $D^{-1} = B^{-1}A^{-1}B^{-1}$.]

(c) Sei $T = AB$ die Transformationsmatrix, deren Matrixelemente den Bezug zwischen der alten und einer neuen Basis $\{\tilde{\mathbf{v}}_i\}$ angeben, $\mathbf{e}_j = \tilde{\mathbf{v}}_i T_{ij}$. Wie lautet die Darstellung $\tilde{\mathbf{x}}' = (\tilde{x}'_1, \tilde{x}'_2)^T$ des Vektors $\mathbf{x}'$ in der $\{\tilde{\mathbf{v}}_i\}$-Basis? Finden Sie die Darstellung $\tilde{D}$ von D in der neuen Basis.

Aufgabe 6. *Matrixrechnung*

Finden Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 1 & 2-i \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7. *Taylorreihen*

(a) Geben Sie die Taylorentwicklung der reellen Funktion

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-2x}}$$

um $x_0 = 0$ bis einschließlich $\mathcal{O}(x^2)$ an.

(b) Lösen Sie die Gleichung $x^3 = \varepsilon e^x + 1$ iterativ bis einschließlich zur $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ für $x \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Es gilt $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 6abc$.

Aufgabe 8. *Fourier-Reihen*

Bestimmen Sie die Fourier-Reihe für die periodische Funktion
$f_2(x) = \begin{cases} 2x, & \text{falls } -\pi < x < 0 \\ -2x, & \text{falls } 0 \leq x < \pi \end{cases}$, mit $f_2(\pm\pi) = -2\pi$ und $f_2(x + 2\pi) = f_2(x)$.