Fakultät für Physik
Jan von Delft, Katharina Stadler, Frauke Schwarz
T0: Rechenmethoden für Physiker, WiSe 2013/14

http://homepages.physik.uni-muenchen.de/~vondelft/Lehre/13t0/

Hauptklausur: T0

Lösung Aufgabe 1: Integrale mit der δ-Funktion

(a) *(1 Punkt)*

$$I_a = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x+1)x^2 = (-1)^2 = 1,$$

da die Nullstelle der δ-Funktion -1 beträgt und innerhalb des Integrationsbereichs liegt.

(b) *(2 Punkte)* Im Allgemeinen gilt $\delta(g(x)) = \sum_k \frac{\delta(x-y_k)}{|g'(y_k)|}$, wobei y_k die einfachen Nullstellen von $g(x)$ sind. Hier: $g(x) = \tan(x)$, mit $y_k = k\pi$. Im Integrationsbereich liegen genau zwei Nullstellen: $y_{-1} = 0$ und $y_1 = \pi$. Somit:

$$I_b = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \mathrm{d}x\, \delta(\tan(x)) \cos^2(x) = \frac{\cos^2(0)}{|\cos^2(0)|} + \frac{\cos^2(\pi)}{|\cos^2(\pi)|} = [1^2 + (-1)^2] = 2$$

(c) *(2 Punkte)*

$$I_c = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}\mathbf{x}\, \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \mathrm{e}^{\mathbf{x}^2} = \mathrm{e}^{\mathbf{y}^2} = \mathrm{e}^{[(1/\sqrt{2})^2 + (-1/\sqrt{2})^2]} = e^1$$

Die Nullstelle $\mathbf{y} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})^T$ liegt im Integrationsbereich.

Lösung Aufgabe 2: Lineare Abbildungen, Basistransformation

(a)

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ z &= Ay = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} v_1 &= \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 \\ v_2 &= -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ \Rightarrow C^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow C &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Oder statt Invertieren der Matrix, die Gleichungen explizit invertieren:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 =& \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{4}v_2 \\ \mathbf{e}_2 =& v_1 + \frac{1}{2}v_2\end{aligned}$$

und daraus C ablesen.

$\tilde{x} = Cx = (3, -\frac{1}{2})^T$
Bonus:

(c) $\tilde{A} = CAC^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$

Lösung Aufgabe 3: Diagonalisierung einer 3×3 Matrix

(5 Punkte) Charakteristisches Polynom $\stackrel{!}{=} 0$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda[-(1+\lambda)(-\lambda) - 1] + \lambda = -\lambda[\lambda^2 + \lambda - 2] = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 2)$$

Daraus folgen die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_2 = -2$.

normierte Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = 0: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \quad v^2_1 = 0 \text{ und } v^1_1 + v^3_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1: \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \quad -v^1_2 + v^2_2 = 0 \text{ und } v^2_2 - v^3_2 = 0 \Rightarrow v^3_2 = v^2_2 = v^3_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = -2: \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \quad 2v^1_3 + v^2_3 = 0 \text{ und } v^2_3 + 2v^3_3 = 0 \Rightarrow v^3_3 = v^1_3 = -\frac{1}{2}v^1_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung Aufgabe 4: Wegintegral

(a) $\rho(t) = R\,, z(t) = Ht\,, \phi(t) = 2\pi n t\,.$ Der Fisch macht n volle Umdrehungen.

(b)

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}}_1(t) =& R\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi + H\mathbf{e}_z \\
K_1 =& \int \mathbf{F}(\mathbf{r}_1) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_1 \\
=& \int_0^1 \mathrm{d}t \mathbf{F}(r_1) \cdot \dot{\mathbf{r}}_1(t) \\
=& \int_0^1 \mathrm{d}t \left(RHt\mathbf{e}_\phi + H^2t^2\mathbf{e}_z\right) \cdot \left(R\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi + H\mathbf{e}_z\right) \\
=& \int_0^1 \mathrm{d}t \left(2\pi n R^2 Ht + H^3t^2\right) \\
=& \pi n R^2 H + \frac{1}{3}H^3
\end{aligned}$$

Bonus:

(c)

$$\begin{aligned}
r_2(t) =& \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ Ht \end{pmatrix}\,, t \in [0,1] \\
\dot{\mathbf{r}}_2(t) =& H\mathbf{e}_z \\
K_2 =& \int_0^1 \mathrm{d}t \mathbf{F}(r_2) \cdot \dot{\mathbf{r}}_2(t) \\
=& \int_0^1 \mathrm{d}t \left(H^2t^2\mathbf{e}_z\right) \cdot (H\mathbf{e}_z) = \int_0^1 \mathrm{d}t H^3 t^2 = \frac{1}{3}H^3\,.
\end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 5: Volumen einer Schüsselwand

(a) *(1.5 Punkte)* Integrationsbereiche:

$$r \in [R_i(\theta), R], \theta \in [0, \pi/2], \phi \in [0, 2\pi]$$

(b) *(3.5 Punkte)* Volumen

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\, \sin\theta \int_{R_i(\theta)}^{R} \mathrm{d}r\, r^2 \\
&= 2\pi \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\, \sin\theta\, \frac{1}{3}[r^3]_{R_i(\theta)}^{R} \\
&= 2\pi \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\, \sin\theta\, \frac{R^3}{3}[1 - (1 - \frac{1}{4}\cos\theta)^3] \\
&= \frac{2\pi R^3}{3} \int_0^1 \mathrm{d}u\, [1 - (1 - \frac{1}{4}u)^3] = \frac{2\pi R^3}{3} \left[u + (1 - \frac{1}{4}u)^4\right]_0^1 = \frac{2\pi R^3}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{27}{128}\pi R^3
\end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 6: Taylorentwicklung

(a)

$$\begin{aligned} f(x) =& \mathrm{e}^{x+x^2} = 1 + (x + x^2) + \frac{1}{2}(x + x^2)^2 + \mathcal{O}\left(x^3\right) \\ =& 1 + x + x^2 + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}\left(x^3\right) \\ =& 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \mathcal{O}\left(x^3\right) \end{aligned}$$

(b) $\ln\left(y^3\right) - y = -2 + x^2$. Für $x = 1$ gilt:

$$3\ln(y(1)) - y(1) = -2 + 1$$

Dies liefert unmittelbar $y(1) = 1$.
Wir leiten die Gleichung mehrfach ab:

$$\ln\left(y^3\right) - y = -2 + x^2 \tag{1}$$

$$d_x(1): \quad \frac{3}{y}y' - y' = 2x \tag{2}$$

$$(2)_{x=1}: \quad \frac{3}{y(1)}y'(1) - y'(1) = 2 \qquad \Rightarrow y'(1) = 1 \tag{3}$$

$$d_x(2): \quad -\frac{3}{y^2}(y')^2 + \frac{3}{y}y'' - y'' = 2 \tag{4}$$

$$(4)_{\varepsilon=0}: \quad -3 + 2y''(1) = 2 \qquad \Rightarrow y''(1) = \frac{5}{2} \tag{5}$$

Folglich hat die Taylor-Reihe für $y(x)$ folgende Form:

$$y(x) = 1 + (x - 1) + \frac{5}{4}(x - 1)^2 + \mathcal{O}\left((x - 1)^3\right) \ . \tag{6}$$

Lösung Aufgabe 7: Differentialgleichung mit Separation der Variablen (logistische Funktion)

(a) *(5 Punkte)*

$$\begin{aligned}
&\text{Differentialgleichung} & ky(c-y) &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\
&\text{Separation der Variablen} & k\mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}y}{y(c-y)} \\
&\text{Anfangsbedingung } y(0) = \frac{c}{2} & \int_0^t \mathrm{d}\tilde{t}\, k &= \int_{c/2}^{y} \mathrm{d}\tilde{y}\, \frac{1}{\tilde{y}(c-\tilde{y})} \\
&\text{Löse Integral mit Hinweis} & kt &= \int_{c/2}^{y} \mathrm{d}\tilde{y}\, \frac{1}{c}\left(\frac{1}{\tilde{y}} + \frac{1}{c-\tilde{y}}\right) \\
& & ckt &= \ln y - \ln(c-y) - \ln\left(\frac{c}{2}\right) + \ln\left(c - \frac{c}{2}\right) \\
&\text{Auflösen nach y} & \ln\left(\frac{y}{c-y}\right) ckt &= \ln\left(\frac{y}{c-y}\right) \\
& & \mathrm{e}^{ckt} &= \frac{y}{c-y} \\
& & \mathrm{e}^{-ckt} &= \frac{c}{y} - 1 \\
&\text{Lösung} & y &= \frac{c}{1+\mathrm{e}^{-ckt}}
\end{aligned}$$

Hintergrundinformation: Die logistische Funktion $y(t)$ beschreibt z.B. das Wachstum einer idealen Bakterienpopulation im Fall begrenzter Resourcen. Das exponentielle Wachstum wird durch die endlichen Resourcen beschränkt (z.B. Nährboden bestimmter Größe). Die Bakterienzahl erreicht deshalb eine obere Schranke c (stabiler Fixpunkt).

(b) *(Bonus: 1 Punkt)*

Differentialgleichung	$y' = F(y) = ky(c-y)$	
Fixpunkt y^* für	$F(y^*) = ky(c-y^*) = 0$	$\rightarrow \quad y* = 0$ und $y* = c$
Stabilitätsanalyse	$F'(y) = kc - 2ky$	
$y^* = 0:$	$F'(0) = kc > 0$	$\rightarrow \quad y^* = 0$ instabiler Fixpunkt
$y^* = c:$	$F'(c) = -kc < 0$	$\rightarrow \quad y^* = c$ stabiler Fixpunkt

Der stabile Fixpunkt c wird im Grenzfall $t \to \infty$ erreicht.

Lösung Aufgabe 8: Überdämpfter harmonischer Oszillator

(5 Punkte)

1. Lösungsweg 1:

Ansatz	$x(t) = c\mathrm{e}^{\lambda t}$
1. Ableitung	$\dot{x}(t) = \lambda c\mathrm{e}^{\lambda t}$
2. Ableitung	$\ddot{x}(t) = \lambda^2 c\mathrm{e}^{\lambda t}$
Einsetzen in (7)	$0 = \lambda^2 x(t) + 10\lambda x(t) + 16x(t)$
$\Rightarrow$	$0 = \lambda^2 + 10\lambda + 16$
$\Rightarrow$	$\lambda_\pm = -5 \pm \sqrt{5^2 - 16} = -5 \pm 3$
Superposition	$x(t) = c_+\mathrm{e}^{\lambda_+ t} + c_-\mathrm{e}^{\lambda_- t}$
Anfangsbedingung	$x(0) = c_+ + c_- \stackrel{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad c_- = -c_+$
	$\dot{x}(0) = \lambda_+ c_+ + \lambda_- c_- = c_+(\lambda_+ - \lambda_-) = c_+ 6 \stackrel{!}{=} 1$
$\Rightarrow$	$c_\pm = \pm\frac{1}{6}$
Lösung	$x(t) = \frac{\mathrm{e}^{-5t}}{6}(\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{-3t}) = \frac{1}{6}(\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-8t}) = \frac{\mathrm{e}^{-5t}}{3}\sinh(3t)$

2. Lösungsweg 2:
Rückführung auf Matrixgleichung:

$$\ddot{x} + 10\dot{x} + 16x = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1\ , \tag{7}$$

entspricht mittels $\mathbf{x} \equiv (x, \dot{x})^T = (x^1, x^2)^T$ und $\ddot{x} = \dot{x}^2$ einer Matrix-DG 1. Ordnung:

$$\dot{x} = \dot{x}^1 = x^2 \tag{8}$$

$$\ddot{x} = \dot{x}^2 = -16x^1 - 10x^2 \tag{9}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -10 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}}, \tag{10}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = A \cdot \mathbf{x}. \tag{11}$$

$$\text{Anfangswert:} \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) = (x(0), \dot{x}(0))^T = (0, 1)^T. \tag{12}$$

(Homogene) Lösung:
Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte λ_j und Eigenvektoren $\mathbf{v}_j$ $(j = +, -)$ von A:

$$0 = \det(A - \lambda \mathbb{1}|) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -16 & -10 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda\,(10 + \lambda) + 16 = \lambda^2 + 10\lambda + 16 = 0 \tag{13}$$

$$\text{Eigenwerte (für } \gamma > \Omega\text{):} \qquad \boxed{\lambda_\pm = -5 \pm 3} \tag{14}$$

$$\text{Eigenvektoren:} \qquad \mathbf{0} = (A - \lambda_j \mathbb{1})\mathbf{v}_j = \begin{pmatrix} -\lambda_j & 1 \\ -16 & -10 - \lambda_j \end{pmatrix} \mathbf{v}_j \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\mathbf{v}_j = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_j \end{pmatrix}}.$$

Das funktioniert, denn $-16 \cdot 1 + (-10 - \lambda_j) \cdot \lambda_j$=0 wenn λ_j ein Eigenwert ist.

Da $\mathbf{x}_j(t) = \mathbf{v}_j \mathrm{e}^{\lambda_j t}$ die homogene Gleichung $\dot{\mathbf{x}}_j = A \cdot \mathbf{x}_j$ erfüllt, wird die erste Komponente von $\mathbf{x}_j(t)$, also $x_j(t) = e^{\lambda_j t}$, die DG (7) erfüllen. Check, dass das so ist:

$$(\mathrm{d}_t^2 + 10\mathrm{d}_t + 16)\mathrm{e}^{\lambda_j t} = \left(\gamma_j^2 + 10\gamma_j + 16\right) \mathrm{e}^{\gamma_j t}{=}0\ . \quad \checkmark \tag{15}$$

Die allgemeinste Form der homogenen Lösung ist $\mathbf{x}(t) = \sum_j c^j \mathbf{x}_j(t)$. Für einen gegebenen Anfangswert $\mathbf{x}_0$ legt die Forderung $\mathbf{x}(0) = \sum_j \mathbf{v}_j c^j \stackrel{!}{=} \mathbf{x}_0$ die Koeffizienten c^j fest. In Komponenten ausgeschrieben lautet die Forderung $v^i_{\ j} c^j = x^i_{\ 0}$, und in Matrixnotation, $S\mathbf{c} = \mathbf{x}_0$, wobei die Matrix $S = \{v^i_{\ j}\}$ die Eigenvektoren $\mathbf{v}_j$ als Spaltenvektoren hat:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{-8-(-2)} \begin{pmatrix} -8 & -1 \\ -(-2) & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -8 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$\mathbf{c} = S^{-1}\mathbf{x}_0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} c^+ \\ c^- \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -8 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{c^\pm = \pm\frac{1}{6}}\,. \tag{17}$$

Die homogene Lösung der Matrix-DG (11) ist somit

$$\mathbf{x}(t) = \sum_j c^j \mathbf{x}_j(t) = \frac{1}{3}\left[\mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \mathrm{e}^{-8t} \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}\right], \tag{18}$$

und die homogene Lösung der ursprünglichen DG 2. Ordnung, (7), ist

$$x(t) = x^1(t) = \frac{1}{6}(\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-8t}) = \boxed{\frac{\mathrm{e}^{-5t}}{6}\left[\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{-3t}\right]} = \frac{\mathrm{e}^{-5t}}{3}\sinh(3t)\ . \tag{19}$$

Lösung Aufgabe 9: Greensche Funktion

(a) *(5 Punkte)*

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tilde{t}\, G(t-\tilde{t}) f_A(\tilde{t}) \\ &\stackrel{t'=t-\tilde{t}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tilde{t}\, G(t') f_A(\tilde{t}-t') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t'\, \frac{\theta(t')\mathrm{e}^{-5t'}}{6}(\mathrm{e}^{3t'} - \mathrm{e}^{-3t'})\theta(t-t')e^{-2(t-t')} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{6} \int_0^t \mathrm{d}t'\,(1 - \mathrm{e}^{-6t'}), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Eigenschaft der beiden θ-Funktionen benutzt haben um die Integrationsgrenzen anzupassen. Nun können wir das Integral ausführen,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{6}[t' + \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-6t'}]_0^t \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{6}[t + \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-6t} - \frac{1}{6}] = \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{36}(6t + \mathrm{e}^{-6t} - 1) \end{aligned}$$

(b) *(1 Bonus-Punkt)*

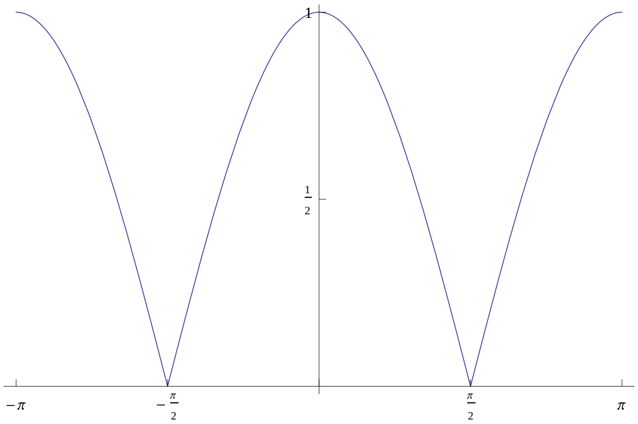
1. Lösungsweg

$$\begin{aligned}
\tilde{G}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \frac{\theta(t)\mathrm{e}^{-5t}}{6} (\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{-3t}) \\
&= \int_0^{\infty} \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{6} (\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-8t}) \\
&= \int_0^{\infty} \mathrm{d}t\, \frac{1}{6} (\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\omega-2)t} - \mathrm{e}^{(\mathrm{i}\omega-8)t}) \\
&= \frac{1}{6} \left[\frac{1}{\mathrm{i}\omega - 2} \mathrm{e}^{(\mathrm{i}\omega-2)t} - \frac{1}{\mathrm{i}\omega - 8} \mathrm{e}^{(\mathrm{i}\omega-8)t} \right]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{6} \left[\frac{1}{\mathrm{i}\omega - 8} - \frac{1}{\mathrm{i}\omega - 2} \right] \\
&= \frac{1}{6} \left[\frac{\mathrm{i}\omega - 2 - (\mathrm{i}\omega - 8)}{(\mathrm{i}\omega - 8)(\mathrm{i}\omega - 2)} \right] \\
&= \frac{1}{16 - 10\mathrm{i}\omega - \omega^2}
\end{aligned}$$

2. Lösungsweg

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}_t^2 + 10\mathrm{d}_t + 4^2)G(t) &= \delta(t) \\
((-\mathrm{i}\omega)^2 - 10\mathrm{i}\omega + 16)\tilde{G}(\omega) &= 1 \\
\rightarrow \quad \tilde{G}(\omega) &= \frac{1}{16 - 10\mathrm{i}\omega - \omega^2}
\end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 10: Fourierreihe



$$
\begin{aligned}
L =& \pi \\
k =& \frac{2\pi n}{L} = 2n \\
f_n =& \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}nx} \cos(x) = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}nx} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right) \\
=& \frac{1}{2} \frac{1}{\mathrm{i}(-2n+1)} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right) + \frac{1}{2} \frac{1}{\mathrm{i}(-2n-1)} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right) \\
=& \frac{1}{2} \frac{1}{\mathrm{i}(-2n+1)} \mathrm{i} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi}\right) + \frac{1}{2} \frac{1}{\mathrm{i}(-2n-1)} \mathrm{i} \left(-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi}\right) \\
=& \cos(n\pi) \left(\frac{1}{-2n+1} - \frac{1}{-2n-1}\right) = (-1)^n \frac{-2n-1-(-2n+1)}{(2n)^2-1} = (-1)^n \frac{-2}{(2n)^2-1} \\
=& (-1)^n \frac{2}{1-(2n)^2} \\
\Rightarrow f(x) =& \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{1-(2n)^2} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}nx}
\end{aligned}
$$

Lösung Aufgabe 11: Satz von Gauß

(a)

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(z\rho^2\right) = 2z$$

(b) Deckel und Boden tragen nicht bei, da $\mathrm{d}\mathbf{S} \propto \mathbf{e}_z \perp \mathbf{v}$.
Der Fluss durch den Mantel ist gegeben über

$$\int_S \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{v} = \int_{\text{Mantel}} \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{v} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^H \mathrm{d}z \, (R\mathbf{e}_\rho) \cdot (Rz\mathbf{e}_\rho) = \pi H^2 R^2$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\int_{V_S} \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{v} &= \int_V \mathrm{d}V \nabla \cdot \mathbf{v} \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^H \mathrm{d}z \int_0^R \mathrm{d}\rho\rho \, (2z) = \pi H^2 R^2
\end{aligned}
$$

Lösung Aufgabe 12: Residuensatz

(a) Wegen $(z^2+1) = (z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})$ gibt es einen Pol erster Ordnung bei $z_1 = -\mathrm{i}$, einen Pol erster Ordnung bei $z_2 = \mathrm{i}$ und einen Pol erster Ordnung bei $z_3 = 2\mathrm{i}$.

(b)

$$\oint_\gamma \mathrm{d}z\, f(z) = 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left(f(z), 2\mathrm{i}\right) = 2\pi\mathrm{i}\frac{2\mathrm{i}}{(2\mathrm{i})^2+1} = \frac{4\pi}{3}$$

(c) Schließt man das Integral in der unteren Halbebene liefert dies dasselbe wie I, da der Beitrag der Kontur abseits der reellen Achse gegen Null geht, denn $zf(z) \overset{|z|\to\infty}{\to} \frac{1}{z^2} \to 0$. In der unteren Halbebene liegt der Pol erster Ordnung bei $z_1 = -\mathrm{i}$. Man erhält ein zusätzliches Minus, da man das Integral gegen den Uhrzeigersinn berechnet:

$$I = -2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left(f(z), -\mathrm{i}\right) = -2\pi\mathrm{i}\left.\frac{z}{(z-\mathrm{i})\,(z-2\mathrm{i})}\right|_{-\mathrm{i}} = \frac{\pi}{3}$$