LMU
LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Fakultät für Physik
Jan von Delft, Katharina Stadler, Frauke Schwarz
T0: Rechenmethoden für Physiker, WiSe 2013/14

http://homepages.physik.uni-muenchen.de/~vondelft/Lehre/13t0/

Hauptklausur: T0

Datum: Donnerstag 20.02.2014

Nachname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

ECTS-Punkte: 9 / 6
(zutreffendes umkreisen)

Übungsgruppe:

- Jede Aufgabe ist auf einem *eigenen Blatt* zu lösen.
- **Extra Blätter:**
  - sind hinten beigefügt; weitere sind auf Nachfrage von der aufsichtführenden Person erhältlich;
  - sollten (auf *jedem* Blatt) mit Ihrem *Namen* und der *Nummer der darauf bearbeiteten Aufgabe* versehen werden;
  - sollten oben links nicht beschrieben werden, um Platz zum Tackern lassen;
- Achten Sie darauf, dass *alle* relevanten Blätter abgegeben werden. Fehlende Aufgaben werden mit null Punkten bewertet.
- Es sind *keine Hilfsmittel* erlaubt.
- **Bearbeitungszeit, Gesamtpunktzahl (ohne Bonuspunkte!):**
  Bachelor (9 ECTS-Punkte): 180 min für 12 Aufgaben, insgesamt 60 Punkte
  Lehramt und Nebenfach (6 ECTS-Punkte): 120 min für 8 Aufgaben, ingesamt 40 Punkte
- **Bonuspunkte:**
  Es gibt zusätzlich 4 Bonuspunkte (je 1 Bonus-Punkt in den Aufgaben 2, 4 ,7 und 9)
- **Für Lehramt und Nebenfach:** Es dürfen beliebige 8 der 12 Aufgaben bearbeitet werden; die ersten 8 befassen sich mit dem für Lehramt und Nebenfach relevanten Stoff. Werden mehr als 8 Aufgaben bearbeitet, dann wird die Gesamtpunktzahl aus der Summe der besten 8 gebildet.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Summe
Punktzahl	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	
Erreichte Punktzahl													
Korrektor													

Aufgabe 1: Integrale mit der δ-Funktion

Lösen Sie die folgenden Integrale

(a) *(1 Punkt)*

$$I_a = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x+1) x^2$$

(b) *(2 Punkte)*

$$I_b = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \mathrm{d}x\, \delta(\tan(x)) \cos^2(x)$$

(c) *(2 Punkte)*

$$I_c = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}\mathbf{x}\, \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \mathrm{e}^{\mathbf{x}^2} \text{ mit } \mathbf{x} = (x^1, x^2)^T \text{ und } \mathbf{y} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})^T$$

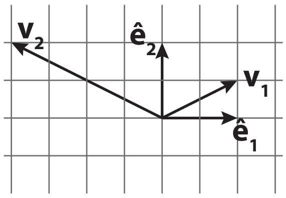
Aufgabe 2: Lineare Abbildungen, Basistransformation

(a) *(1 Punkt)* Betrachten Sie die lineare Abbildung A in zwei Dimensionen, die eine Streckung in $\mathbf{x}$-Richtung um den Faktor $s = 2$ beschreibt.

(i) Finden Sie die Matrixdarstellung von A (bezüglich der Standardbasis).

(ii) Auf welchen Punkt $\mathbf{z}$ wird der Punkt $\mathbf{y} = (2, -1)^T$ durch die Abbildung A abgebildet?

(b) *(4 Punkte)* Die Abbildung zeigt die Standardbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ und eine weitere Basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.



(i) Drücken Sie die Vektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ als Linearkombinationen von $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ aus.

(ii) Finden Sie die Matrix C, deren Matrixelemente $C^i{}_j$ den Bezug zwischen der Standardbasis und der Basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ angeben über $\mathbf{e}_j = \mathbf{v}_i C^i{}_j$.

(iii) Ein Punkt habe in der Standardbasis die Koordinaten $\mathbf{x} = (4, 1)^T$. Welche Koordinaten $\tilde{\mathbf{x}}$ hat er in der Basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$?

Bonus:

(c) *(1 Bonus-Punkt)* Finden Sie die Darstellung der Streckung A bezüglich der Basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

Aufgabe 3: Diagonalisierung einer 3×3 Matrix

(5 Punkte) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_j und die zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_j$ von A ($j = 1, 2, 3$).

Aufgabe 4: Wegintegral

Die Strömungen in einem See verursachen ein Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \rho z \mathbf{e}_\phi + z^2 \mathbf{e}_z$ (mit den üblichen Notationen der Zylinderkoordinaten).
Ein Fisch schwimmt auf einer Spiralbahn, die in kartesischen Koordinaten durch

$$\mathbf{r}_1(t) = (R\cos(2\pi nt),\, R\sin(2\pi nt),\, Ht)$$

mit $t \in [0, 1]$ gegeben ist, wobei n eine positive ganze Zahl ist.

(a) *(2 Punkt)* Die Bahn des Fisches nimmt in Zylinderkoordinaten die Form

$$\mathbf{r}_1(t) = \rho(t)\mathbf{e}_\rho(t) + z(t)\mathbf{e}_z$$

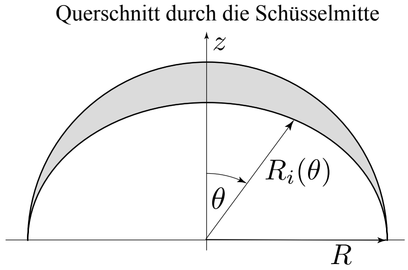
an. Wie lauten $\rho(t), \phi(t)$ und $z(t)$. Wieviele volle Umdrehungen macht der Fisch auf seiner Bahn?

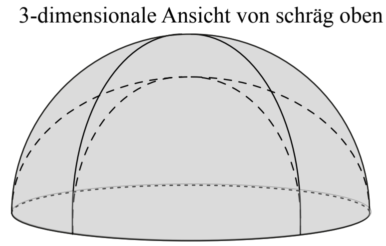
(b) *(3 Punkte)* Berechnen Sie die Arbeit $W_1 = \int \mathrm{d}\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}_1)$, die die Strömung verrichtet, explizit in Zylinderkoordinaten.

Bonus: Ein zweiter Fisch schwimmt vom selben Anfangspunkt zum selben Endpunkt, aber auf einer geraden Linie $\mathbf{r}_2(t)$.

(c) *(1 Bonus-Punkt)* Parametrisieren Sie diese gerade Bahn und berechnen Sie die Arbeit $W_2 = \int \mathrm{d}\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}_2)$, die die Strömung hier verrichtet.

Aufgabe 5: Volumen einer Schüsselwand





Betrachten Sie eine umgestülpte Schüssel, deren Wand sich durch Rotation des in der oberen Skizze grau schattierten sichelförmigen Querschnitts um die z-Achse ergibt. Der Radius der halbkugelförmigen Außenfläche sei R, der Radius der Innenfläche sei durch $R_i(\theta) = R(1 - \frac{1}{4}\cos\theta)$ gegeben. Bestimmen Sie das Volumen der Schüsselwand!

(a) *(1.5 Punkte)* Geben Sie zunächst die Integrationsbereiche für r, θ und ϕ für das Volumenintegral in Kugelkoordinaten an.

(b) *(3.5 Punkte)* Berechnen Sie nun explizit das Volumen V!

Hinweis: Das Ergebnis hat die Form $V = a\pi R^3$. Nach Berechnung aller Integrale können Sie gerne darauf verzichten, einen "kompakten" Ausdruck für die Konstante a zu finden!

Aufgabe 6: Taylorentwicklung

(a) *(2 Punkte)* Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{x+x^2}$ um den Punkt $x = 0$ bis einschließlich Ordnung $\mathcal{O}\left(x^2\right)$.

(b) *(3 Punkte)* Sei $y(x)$ eine reelle und analytische Funktion von x, die für $|x-1| \ll 1$ folgende Gleichung erfüllt:

$$\ln\left(y^3\right) - y = -2 + x^2 \,. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass $y(1) = 1$ die Gleichung erfüllt. Finden Sie anschließend die enstprechende Lösung $y(x)$ der Gleichung iterativ, mittels einer Reihenentwicklung um den Punkt $x = 1$ bis einschließlich $\mathcal{O}((x-1)^2)$.

Hinweis: Eine Möglichkeit, die Taylor-Koeffizienten iterativ zu bestimmen, ist, Ableitungen der Gleichung (1) zu berechnen und diese jeweils an dem Punkt auszuwerten, um den entwickelt wird.

Aufgabe 7: Differentialgleichung mit Separation der Variablen (logistische Funktion)

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = k\, y(t)[c - y(t)],$$

wobei $k > 0$ und $c > 0$ Konstanten sind, und die gesuchte Lösung $0 < y(t) < c$ erfüllt.

(a) *(5 Punkte)* Lösen Sie die Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $y(0) = \frac{c}{2}$ mittels Separation der Variablen.

Hinweis: Intergrale der Form $I = \int \mathrm{d}x\, \frac{1}{x(a-x)}$ mit $a \in \mathbb{R}$ können durch Partialbruchzerlegung umgeschrieben werden zu $I = \int \mathrm{d}x\, \frac{1}{a}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a-x}\right)$.

Bonus:

(b) *(1 Bonus-Punkt)* Finden Sie den stabilen Fixpunkt dieser Differentialgleichung. Für welches t wird dieser erreicht?

Aufgabe 8: Überdämpfter harmonischer Oszillator

(5 Punkte) Finden Sie explizit die Lösung der homogenen Differentialgleichung,

$$\ddot{x} + 10\dot{x} + 16x = 0,$$

mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 1$.
Hinweis 1: Dies ist die Differentialgleichung eines überdämpften harmonischen Oszillators mit $\gamma = 5$ und $\Omega = 4$.
Hinweis 2: Am schnellsten findet man die Lösung mit einem Exponentialansatz.

Aufgabe 9: Greensche Funktion

Betrachten Sie den inhomogenen überdämpften harmonischen Oszillator für $\gamma = 5$ und $\Omega = 4$,

$$\ddot{x} + 10\dot{x} + 16x = f_A(t),$$

mit exponentiell abfallenden Antrieb $f_A(t) = \theta(t)e^{-2t}$.

(a) *(5 Punkte)* Finden Sie eine partikuläre Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung für $t \geq 0$, mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$.

Hinweis: Empfohlener Lösungsweg: Falten Sie die Greenschen Funktion dieser Differentialgleichung, nämlich

$$G(t) = \theta(t)(e^{-2t} - e^{-8t})/6,$$

mit der Inhomogenität!

Bonus:

(b) *(1 Bonus-Punkt)* Finden Sie die Fouriertransformierte $\tilde{G}(\omega)$!

Aufgabe 10: Fourierreihe

Gegeben ist die Funktion $f(x) = |\cos(x)|$.

(a) *(1 Punkt)* Skizzieren Sie die Funktion.

(b) *(4 Punkte)* Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der Funktion $f(x)$, d. h. finden Sie die Fourier-Koeffizienten $\tilde{f}_k$ in der Darstellung

$$f(x) = \frac{1}{L} \sum_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \tilde{f}_k \,,$$

wobei L die Periode von $f(x)$ ist, und $k = \frac{2\pi n}{L}$, mit $n \in \mathbb{Z}$.

Hinweis: Das Intervall $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ beschreibt eine Periode der Funktion und innerhalb dieses Intervalls gilt $|\cos(x)| = \cos(x)$.

Aufgabe 11: Satz von Gauß

Gegeben sei ein Vektorfeld $\mathbf{v}$ in Zylinderkoordinaten

$$\mathbf{v} = z\rho\mathbf{e}_\rho$$

und ein Zylindervolumen V definiert über $\rho \in [0, R]$, $\phi \in [0, 2\pi[$, $z \in [0, H]$.

(a) *(1 Punkt)* Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes $\mathbf{v}$.
Hinweis: Für die Divergenz eines Vektorfeldes $A = A_\rho\mathbf{e}_\rho + A_\phi\mathbf{e}_\phi + A_z\mathbf{e}_z$ in Zylinderkoordinaten gilt:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\partial_\rho\left(\rho A_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\partial_\phi A_\phi + \partial_z A_z$$

Berechnen Sie den Fluss Φ des Vektorfeldes $\mathbf{v}$ durch die Oberfläche S des Zylindervolumens V auf zwei Arten:

(b) *(2,5 Punkte)* indem Sie das Flussintegral $\Phi = \int_S \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}$ explizit berechnen.

(c) *(1,5 Punkte)* indem Sie das Flussintegral mithilfe des Satz von Gauß in ein Volumenintegral über $\nabla \cdot \mathbf{v}$ umschreiben und dieses Volumenintegral explizit berechnen.

Aufgabe 12: Residuensatz

Gegeben ist die Funktion

$$f(z) = \frac{z}{(z^2+1)\,(z-2\mathrm{i})}$$

(a) *(1 Punkt)* Finden Sie die Pole der Funktion $f(z)$ in der komplexen Ebene. Um Pole welcher Ordnung handelt es sich?

(b) *(1,5 Punkte)* Berechnen Sie das Integral $\oint_\gamma \mathrm{d}z\, f(z)$, wobei die Kontur γ einen Kreis mit Radius $R = \frac{1}{2}$ um den Punkt $z = 2\mathrm{i}$ gegen den Uhrzeigersinn beschreibt. Skizzieren Sie die Kontur und die von ihr eingeschlossenen Pole.

(c) *(2,5 Punkte)* Berechnen Sie das Integral $I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x)$, indem Sie das Integral in der unteren Halbebene zu einem Konturintegral in Form eines Halbkreises mit Radius $R \to \infty$ schließen und dieses Konturintegral explizit berechnen. Skizzieren Sie die Kontur und die von ihr eingeschlossenen Pole. Warum liefert dieses Konturintegral dasselbe Ergebnis wie das Integral I auf der reellen Achse?