Nachklausur: T0

Lösung Hausaufgabe 1: Gradient, Divergenz und Rotation in kartesischen Koordinaten

(a) *(3 Punkte)*

(i) Einheitsvektor in Richtung maximaler Steigung am Punkt $\mathbf{r} = (x, y)^T$ ist parallel zum Gradienten von $f(\mathbf{r})$:

$$\partial_x r = \frac{2x}{2r} = \frac{x}{r} \quad \text{analog für } y$$

$$\nabla f(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \partial_x f(\mathbf{r}) \\ \partial_y f(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r^2}\frac{x}{r}y \\ \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}\frac{y^2}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{yx}{r^3} \\ \frac{x^2}{r^3} \end{pmatrix} = \frac{x}{r^3}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$$\to \mathbf{n}_\parallel = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

(ii) Einheitsvektor in Richtung der Konturlinien: Konturlinien verlaufen senkrecht zu $\mathbf{n}_\parallel$, also

$$\mathbf{n}_\perp = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(iii) Gleichung $y(x)$ für die Konturlinie auf der Höhe $f(\mathbf{r}) = H$:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}) &= H \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} &= H \\ y^2 &= H^2(x^2+y^2) \\ y^2(1-H^2) &= H^2x^2 \\ y &= \frac{H}{\sqrt{1-H^2}}x \end{aligned}$$

(b) *(2 Punkte)*

$$\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla \times \begin{pmatrix} xy \\ xz \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -2x \\ z-x \end{pmatrix}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{w}(\mathbf{r}) = \nabla \times \begin{pmatrix} -x \\ -2x \\ z-x \end{pmatrix} = -1 + 1 = 0$$

Oder: $\mathbf{w}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 0$, denn Wirbelfelder sind immer quellenfrei!

Lösung Hausaufgabe 2: Orthogonalbasis

(a) $a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ impliziert

$$\begin{aligned} a + 3b + c =& 0 \\ -a - b - 5c =& 0 \\ 2b - c =& 0 \end{aligned}$$

Die letzten Gleichung ist gleichbedeutend mit $c = 2b$. Eingesetzt in die erste Gleichung folgt daraus $a = -5b$. Die zweite Gleichung liefert dann $-6b = 0$, also ist $a = b = c = 0$ die einzige Lösung des Gleichungssystems, die Vektoren sind also linear unabhängig.

(b)

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 =& \frac{1}{|\mathbf{v}_1|}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \\
\tilde{\mathbf{v}}_2 =& \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{e}_1)\,\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} - \frac{4}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \\
\mathbf{e}_2 =& \frac{1}{|\tilde{\mathbf{v}}_2|}\tilde{\mathbf{v}}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \\
\tilde{\mathbf{v}}_3 =& \mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{e}_1)\,\mathbf{e}_1 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{e}_2)\,\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix}1\\-5\\-1\end{pmatrix} - \frac{6}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} - \frac{6}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} \\
\mathbf{e}_3 =& \frac{1}{|\tilde{\mathbf{v}}_3|}\tilde{\mathbf{v}}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(c) In einer Orthonormalbasis lassen sich die Koeffizienten eines Vektors unmittelbar aus dem Skalarprodukt des Vektors mit den Basisvektoren ablesen:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1 &= 0 \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2 &= \sqrt{6} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2 &= -\sqrt{3} \end{aligned}$$

Für $\mathbf{a}$ gilt also $\mathbf{a} = \sqrt{6}\mathbf{e}_2 - \sqrt{3}\mathbf{e}_3$.

Lösung Hausaufgabe 3: Lineare Abbildungen

(a) Die Drehung bildet die x-Achse auf die y-Achse ab und die positive y-Achse auf die negative x-Achse, also:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ \tilde{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} = (2, -1, 3)^T \,. \end{aligned}$$

Die Matrix AB ist nicht orthogonal, da die Länge von Vektoren nicht invariant unter der Abbildung AB ist, oder durch explizite Berechnung:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow (AB)(AB)^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \neq \mathbb{1} \,.$$

(b) Die folgenden Zusammenhänge sieht man einfach:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) & \Rightarrow \tilde{\mathbf{e}}_1 &= \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{v}}_1 + \tilde{\mathbf{v}}_2) = (1, 2, 0)^T \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) & \Rightarrow \tilde{\mathbf{e}}_2 &= \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{v}}_1 - \tilde{\mathbf{v}}_2) = (1, -1, 2)^T \\ \mathbf{e}_3 &= -\mathbf{v}_3 & \Rightarrow \tilde{\mathbf{e}}_3 &= -\tilde{\mathbf{v}}_3 = (0, 1, 1)^T \end{aligned}$$

also folgt

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung Hausaufgabe 4: Diagonalisierung einer 2×2 Matrix

(a) *(1 Punkt)* $0 \overset{!}{\neq} \det A = 1 - (-2a+1)^2 = 1 - 4a^2 + 4a - 1 = -4a(a-1)$.
Die Matrix A ist also für $a = 0$ und $a = 1$ nicht invertierbar.

(b) *(3 Punkte)* Charakteristisches Polynom $\overset{!}{=} 0$

$$\begin{aligned} 0 \overset{!}{=} \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -2a+1 \\ -2a+1 & -1-\lambda \end{pmatrix} &= (1+\lambda)^2 - (-2a+1)^2 = 1 + 2\lambda + \lambda^2 - (4a^2 - 4a + 1) \\ &= \lambda^2 + 2\lambda - 4a^2 + 4a \\ \lambda_{1,2} &= -\frac{2}{2} \pm \frac{\sqrt{4 - 4(-4a^2 + 4a)}}{2} = -1 \pm (2a - 1) \end{aligned}$$

Daraus folgen die Eigenwerte $\lambda_1 = -2a$ und $\lambda_2 = 2a - 2$.

normierte Eigenvektoren:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 = -2a: \quad & \begin{pmatrix} -(-2a+1) & -2a+1 \\ -2a+1 & -(-2a+1) \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \\
& \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\lambda_2 = 2a - 2: \quad & \begin{pmatrix} -2a+1 & -2a+1 \\ -2a+1 & -2a+1 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \\
& \Rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(c) *(1 Punkt)*
Für $a = \frac{1}{2}$ erhält man $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

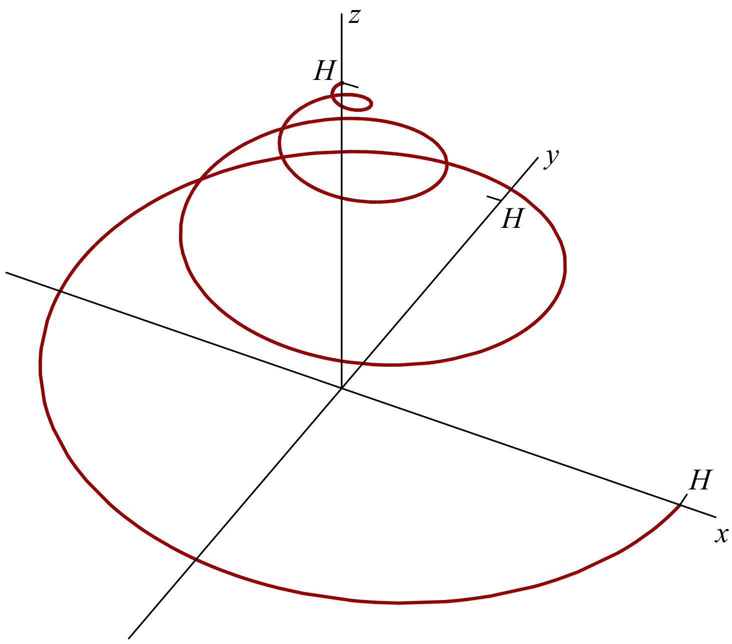
Bonus:

(d) *(1 Punkt)* Die Transformationsmatrix S mit der Eigenschaft, dass $S^{-1}AS$ diagonal ist, hat die Eigenvektoren als Spaltenvektore (Reihenfolge beliebig), und da die Eigenvektoren normiert sind und A reell symmetrisch ist, gilt $S^{-1} = S^T$. Somit

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = S^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung Hausaufgabe 5: Wegintegral

(a) $\rho(t) = H - z(t)$ und vier Umdrehungen



(b)

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) =& \rho(t)\mathbf{e}_\rho(t) + z(t)\mathbf{e}_z \\
\mathbf{r}(t) =& \dot\rho(t)\mathbf{e}_\rho(t) + \dot\phi(t)\rho(t)\mathbf{e}_\phi + \dot z(t)\mathbf{e}_z \\
=& 2H\frac{t}{t_f^2}\mathbf{e}_\rho + \omega H\left(\frac{t}{t_f}\right)^2\mathbf{e}_\phi - 2H\frac{t}{t_f^2}\mathbf{e}_z \\
v(t) = |\dot{\mathbf{r}}(t)| =& \left(8H^2\frac{t^2}{t_f^4} + \omega^2 H^2\left(\frac{t}{t_f}\right)^4\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
W =& \int_\gamma \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int_0^{t_f} \mathrm{d}t\,\dot{\mathbf{r}}(t)\cdot\mathbf{F}\left(\mathbf{r}(t)\right) \\
=& \int_0^{t_f}\mathrm{d}t\,\left(-H\frac{2t}{t_f^2}\mathbf{e}_z\right)\cdot(-mg\mathbf{e}_z) = Hmg
\end{aligned}$$

Dies entspricht genau dem Unterschied in der potentiellen Energie von Anfangs- und Endpunkt: $-mg\Delta z = mgH$.

Lösung Hausaufgabe 6: Volumen einer Flasche

(a) *(1.5 Punkte)* Integrationsbereiche:

$$\rho \in [0, \frac{\sqrt{3\pi}}{2}], \phi \in [0, 2\pi], z \in [0, h(\rho)]$$

(b) *(3.5 Punkte)* Volumen

$$\begin{aligned}
V =& \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\frac{\sqrt{3\pi}}{2}}\mathrm{d}\rho\,\rho\int_0^{h(\rho)}\mathrm{d}z \\
=& \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\frac{\sqrt{3\pi}}{2}}\mathrm{d}\rho\,\rho\cdot h(\rho) \\
=& 2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\mathrm{d}\rho\,\rho\cdot 4 + 2\pi\int_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{3\pi}}{2}}\mathrm{d}\rho\,\rho\cdot[\cot(\rho^2)+3] \\
=& 2\pi\frac{4}{2}\rho^2|_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} + 2\pi\frac{3}{2}\rho^2|_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{3\pi}}{2}} + \pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}u\,\cot(u) = \\
=& 2\pi\frac{4}{2}\frac{\pi}{4} + 2\pi\frac{3}{2}\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) + \pi\ln|\sin(\frac{3\pi}{4})| - \pi\ln|\sin(\frac{\pi}{4})| \quad = \pi^2 + \frac{3}{2}\pi^2 + \pi\ln(\frac{\sqrt{2}}{2}) - \pi\ln(\frac{\sqrt{2}}{2}) \\
=& \frac{5}{2}\pi^2
\end{aligned}$$

Lösung Hausaufgabe 7: Taylor-Reihe und Lagrange-Multiplikatoren

(a)

$$\begin{aligned}
f(x) =& e^{x+y^2} = 1 + x + y^2 + \frac{1}{2}\left(x+y^2\right)^2 + \mathcal{O}\left(x^2, y^2, xy\right) \\
=& 1 + x + y^2 + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}\left(x^2, y^2, xy\right)
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
V =& 8x_p y_p z_p \\
\tilde{V} =& 8x_p y_p z_p - \lambda\left(\frac{x_p^2}{a^2} + \frac{y_p^2}{b^2} + \frac{z_p^2}{c^2} - 1\right) \\
\partial_{x_p}\tilde{V} =& 8y_p z_p - 2\lambda\frac{x_p}{a^2} \stackrel{!}{=} 0 \\
\partial_{y_p}\tilde{V} =& 8x_p z_p - 2\lambda\frac{y_p}{b^2} \stackrel{!}{=} 0 \\
\partial_{z_p}\tilde{V} =& 8x_p y_p - 2\lambda\frac{z_p}{c^2} \stackrel{!}{=} 0
\end{aligned}$$

Wäre eine der Komponenten x_p , y_p oder z_p gleich null, würde unmittelbar $x_p = y_p = z_p = 0$ folgen. Da dieser Punkt nicht auf dem Ellipsoid liegt, sind alle Komponenten ungleich null.
Aus der ersten Gleichung folgt dann $\lambda = \frac{4a^2 y_p z_p}{x_p}$.
Die anderen beiden Gleichungen werden damit zu

$$\begin{aligned}
8x_p z_p - \frac{8a^2 y_p^2 z_p}{x_p c^2} \\
8x_p y_p - \frac{8a^2 y_p z_p^2}{x_p c^2}
\end{aligned}$$

Das ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}
\frac{x_p^2}{a^2} = \frac{y_p^2}{b^2} \\
\frac{x_p^2}{a^2} = \frac{z_p^2}{c^2}
\end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\frac{x_p^2}{a^2} = \frac{y_p^2}{b^2} = \frac{z_p^2}{c^2}$$

Einsetzen in Nebenbedingung liefert

$$x_p = \frac{a}{\sqrt{3}}\,,\ y_p = \frac{b}{\sqrt{3}}\,,\ z_p = \frac{c}{\sqrt{3}}\,.$$

Das maximale Volumen ist somit: $V = 8\frac{a}{\sqrt{3}}\frac{b}{\sqrt{3}}\frac{c}{\sqrt{3}} = \frac{8}{3\sqrt{3}}abc$.

Lösung Hausaufgabe 8: Differentialgleichung mit Substitution und Separation der Variablen

(a) Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = -\sin x - y\tan x, \quad \text{für} \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}[\quad \text{und} \quad y(0) = 0\ . \tag{1}$$

(i) *(3 Punkte)* separable Differentialgleichung mittels Substitution:

$$y = [\ln u(x)]\cos x$$

Damit lässt sich die Differentialgleichung $y'(x) = -\sin x - y\tan x$ mit Hilfe von

$$y'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}\cos x - [\ln u(x)]\sin x$$

und

$$y'(x) = -\sin x - \cos x[\ln u(x)]\tan x = -\sin x - [\ln u(x)]\sin x$$

umschreiben zu

$$\begin{aligned}
\frac{u'(x)}{u(x)}\cos x - [\ln u(x)]\sin x &= -\sin x - [\ln u(x)]\sin x \\
\frac{u'(x)}{u(x)} &= -\tan x \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{1}{u} &= -\tan x
\end{aligned}$$

Anfangsbedingung:

$$\begin{aligned}
\frac{y}{\cos x} &= \ln u(x) \\
u(x) &= \mathrm{e}^{y/\cos x}
\end{aligned}$$

Aus $x_0 = 0$, $y_0 = y(x_0) = 0$ folgt $u_0 = u(x_0) = \mathrm{e}^{\frac{y_0}{\cos x_0}} = \mathrm{e}^0 = 1$.

(ii) *(2 Punkte)* Lösung der Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
\int_{u_0=1}^{u} \frac{\mathrm{d}u}{u} &= \int_{x_0=0}^{x} -\mathrm{d}x\tan x \\
\ln u(x) &= \ln(\cos x) \\
\frac{y(x)}{\cos x} &= \ln(\cos x) \\
y(x) &= \cos x[\ln(\cos x)]
\end{aligned}$$

Bonus:

(b) *(1 Bonus-Punkt)* Integration mittels Substitution:

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}x\, \tan x &= \int \mathrm{d}x\, \frac{\sin x}{\cos x}\\ &= -\int \mathrm{d}w\, \cos x \quad \text{mit } w = \cos x \text{ und } \mathrm{d}w = -\sin x\, \mathrm{d}x\\ &= -\int \mathrm{d}w\, \frac{1}{w} = -\ln w + \text{const.} = -\ln(\cos x) + \text{const.}\end{aligned}$$

Lösung Hausaufgabe 9: Homogene Differentialgleichung

(a) *(2 Punkte)* Lösung der homogenen Differentialgleichung,

$$\ddot{x} + 2\dot{x} = 0, \tag{2}$$

mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 1$:

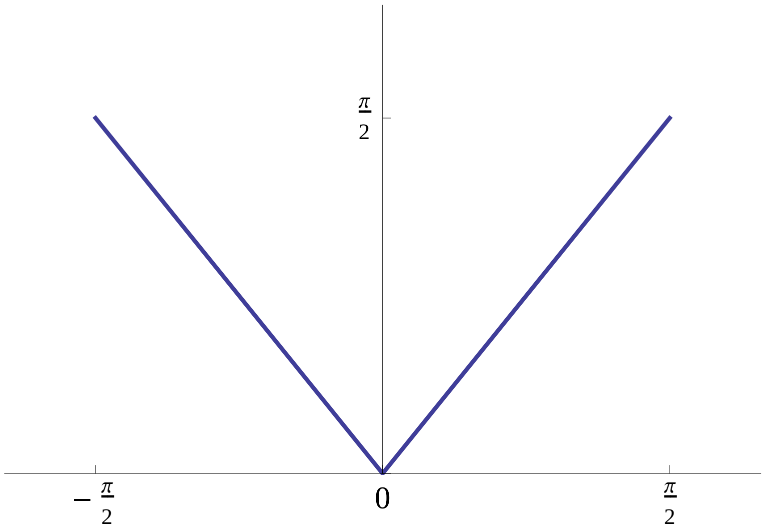
Ansatz	$x(t) = c\mathrm{e}^{\lambda t}$
1. Ableitung	$\dot{x}(t) = \lambda c\mathrm{e}^{\lambda t}$
2. Ableitung	$\ddot{x}(t) = \lambda^2 c\mathrm{e}^{\lambda t}$
Einsetzen in (2)	$0 = \lambda^2 x(t) + 2\lambda x(t)$
$\Rightarrow$	$0 = \lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda + 2)$
$\Rightarrow$	$\lambda_\pm = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases}$
Superposition	$x(t) = c_+\mathrm{e}^{\lambda_+ t} + c_-\mathrm{e}^{\lambda_- t}$
Anfangsbedingung	$x(0) = c_+ + c_- \overset{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad c_- = -c_+$
	$\dot{x}(0) = \lambda_+ c_+ + \lambda_- c_- = c_+(\lambda_+ - \lambda_-) = 2c_+ \overset{!}{=} 1$
$\Rightarrow$	$c_\pm = \pm\frac{1}{2}$
Lösung	$x(t) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{0t} - \mathrm{e}^{-2t}) = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-2t})$

(b) *(3 Punkte)* $x(t) = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-2t})$ erfüllt (2).
$D(\mathrm{d}_t)G(t) \overset{?}{=} \delta(t)$ mit $D(\mathrm{d}_t) = \mathrm{d}_t^2 + 2\mathrm{d}_t$ und $G(t) = \theta(t)x(t)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_t(\theta(t)x(t)) &= \delta(t)x(t) + \theta(t)\mathrm{d}_t x(t) &&= \delta(t)x(0) + \theta(t)\mathrm{d}_t x(t) &&= \theta(t)\mathrm{d}_t x(t)\\
\mathrm{d}_t^2(\theta(t)x(t)) &= \mathrm{d}_t(\theta(t)\mathrm{d}_t x(t)) &&= \delta(t)\mathrm{d}_t x(t) + \theta(t)\mathrm{d}_t^2 x(t) &&= \delta(t) + \theta(t)\mathrm{d}_t^2 x(t)\\
\Rightarrow D(\mathrm{d}_t)G(t) &= (\mathrm{d}_t^2 + 2\mathrm{d}_t)G(t) &&= \delta(t) + \theta(t)\underbrace{(\mathrm{d}_t^2 + 2\mathrm{d}_t)x(t)}_{\overset{(2)}{=}0} &&= \delta(t)\checkmark
\end{aligned}$$

Lösung Hausaufgabe 10: Fourierreihe

(a)



(b) $L = \pi$, $k = 2n$ Der Koeffizient f_0 muss getrennt berechnet werden:

$$f_0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |x| = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x = \frac{\pi^2}{4}$$

Für $k \neq 0$ lässt sich f_k mit Hilfe von partieller Integration berechnen:

$$\begin{aligned}
f_k &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}|x| = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}(-x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}x \\
&= -\left.\frac{x}{ik}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \frac{1}{(ik)}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + \left.\frac{x}{ik}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{(ik)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \\
&= -\frac{\pi}{2\mathrm{i}k}(-1)^n + \left.\frac{1}{(\mathrm{i}k)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \frac{\pi}{2\mathrm{i}k}(-1)^n - \left.\frac{1}{(\mathrm{i}k)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{\pi}{2\mathrm{i}k}(-1)^n + \frac{1}{(\mathrm{i}k)^2} - \frac{1}{(\mathrm{i}k)^2}(-1)^n + \frac{\pi}{2\mathrm{i}k}(-1)^n + \frac{1}{(\mathrm{i}k)^2} - \frac{1}{(\mathrm{i}k)^2}(-1)^n \\
&= \frac{2}{k^2}(-1)^n - \frac{2}{k^2} = \begin{cases} \frac{-\pi^2}{\pi^2 n^2} \text{ für } n = 2m+1 \\ 0 \text{ für } n = 2m \end{cases} \quad , \quad \text{mit } m \in \mathbb{Z} \\
\Rightarrow f(x) &= \frac{1}{\pi}\frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\pi^2}{\pi^2(2m+1)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2(2m+1)x} \\
&= \frac{\pi}{4} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(2m+1)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2(2m+1)x}
\end{aligned}$$

Die Funktion ist symmetrisch, daher kann die Funktion auch als Cosinus-Reihe geschrieben werden:

$$
\begin{aligned}
a_0 =& \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x x = \frac{\pi}{2} \\
a_n =& \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x \cos(kx) x = \frac{4}{\pi}\left(x\sin(kx)\frac{1}{k}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x \sin(kx)\frac{1}{k}\right) \\
=& \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\underbrace{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}_{=0} + \frac{1}{k^2}\cos(kx)\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) \\
=& \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{k^2}\cos(\pi n) - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{k^2}(-1)^n - \frac{1}{k^2}\right) \\
=& \begin{cases} 0 \text{ für } n = 2m \\ -\frac{2\pi}{\pi^2 n^2} \text{ für } n = 2m+1 \end{cases} \\
\Rightarrow f(x) =& \frac{\pi}{4} + \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{-2\pi}{\pi^2(2m+1)^2}\right)\cos\left(\frac{2\pi(2m+1)}{\pi}x\right)
\end{aligned}
$$

Dieses Ergebnis lässt sich dann in die Basis der e-Funktionen umschreiben:

$$
\begin{aligned}
f(x) =& \frac{\pi}{4} - \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{2\pi}{\pi^2(2m+1)^2}\right)\cos\left(\frac{2\pi(2m+1)}{\pi}x\right) \\
=& \frac{\pi}{4} - \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\pi}{\pi^2(2m+1)^2}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi(2m+1)}{\pi}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi(2m+1)}{\pi}x}\right) \\
=& \frac{\pi}{4} - \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi(2m+1)^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2(2m+1)x}
\end{aligned}
$$

Lösung Hausaufgabe 11: Satz von Stokes

(a) $\nabla\times\mathbf{V}(r,\theta,\phi) = \mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\partial_\phi\sin\phi\right) = \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\mathbf{e}_\theta$

(b)

$$
\begin{aligned}
\Phi = \int_S \mathrm{d}\mathbf{S}\cdot(\nabla\times V) =& \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi R^2\left(a^2(\theta)\sin\theta\,\mathbf{e}_r - \frac{1}{4}a(\theta)\sin^2\theta\,\mathbf{e}_\theta\right)\cdot\left(\frac{\cos\phi}{Ra(\theta)\sin\theta}\mathbf{e}_\theta\right) \\
=& \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\left(-\frac{R}{4}\sin\theta\cos\phi\right) = 0
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}(\phi) =& R\mathbf{e}_r \quad \Rightarrow \partial_\phi\mathbf{r}(\phi) = R\sin\theta\,\mathbf{e}_\phi \\
\Phi =& \int_S \mathrm{d}\mathbf{S}\cdot(\nabla\times V) = \int_{\partial S}\mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\,(R\mathbf{e}_\phi)\cdot(\sin\phi\,\mathbf{e}_r) = 0\,.
\end{aligned}
$$

(d)

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathbf{S} =&\partial_\theta \mathbf{r} \times \partial_\phi \mathbf{r} = \left(Ra(\theta)\mathbf{e}_\theta + \frac{R}{4}\sin\theta\,\mathbf{e}_r \right) \times \left(Ra(\theta)\sin\theta\,\mathbf{e}_\phi\right)\\ =&R^2\left(a^2(\theta)\sin\theta\,\mathbf{e}_r - \frac{1}{4}a(\theta)\sin^2\theta\,\mathbf{e}_\theta\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\end{aligned}$$

Lösung Hausaufgabe 12: Residuensatz

Zu lösen ist das Integral

$$I = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\, f(\omega) \text{ mit } f(\omega) = \frac{\mathrm{e}^{i\omega t}}{(\omega^2+1)\,(\omega-\mathrm{i})}.$$

(a) *(1 Punkt)* Wegen $(z^2+1) = (z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})$ gibt es einen Pol erster Ordnung bei $z_1 = -\mathrm{i}$ und einen Pol zweiter Ordnung bei $z_2 = \mathrm{i}$.

(b) *(2.5 Punkt)* Pol erster Ordnung bei $z_1 = -\mathrm{i}$:

$$\mathrm{Res}\,(f(z), -\mathrm{i}) = \left.\frac{z\mathrm{e}^{izt}}{(z-\mathrm{i})^2}\right|_{-\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{e}^t}{4}$$

Pol zweiter Ordnung bei $z_2 = \mathrm{i}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\,(f(z), \mathrm{i}) &= \left.\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathrm{e}^{izt}}{z+\mathrm{i}}\right)\right|_{\mathrm{i}}\\ &= \left.\left(\frac{it\mathrm{e}^{izt}}{z+\mathrm{i}} - \frac{\mathrm{e}^{izt}}{(z+\mathrm{i})^2}\right)\right|_{z=\mathrm{i}}\\ &= \frac{t\mathrm{e}^{-t}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{-t}}{4} = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{4}(1+2t)\end{aligned}$$

(c) *(1.5 Punkt)* $t < 0$: In der unteren Halbebene liegt der Pol erster Ordnung bei $z_1 = -\mathrm{i}$.

$$I = -2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\,(f(z), -\mathrm{i}) = -2\pi\mathrm{i}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{-\mathrm{e}^t}{4} = \frac{\mathrm{e}^t}{4}$$

Man erhält ein zusätzliches Minus, da man das Integral im Uhrzeigersinn berechnet. $t > 0$: Der Pol zweiter Ordnung bei $z_2 = \mathrm{i}$ liegt in der oberen Halbebene, also

$$I = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\,(f(z), \mathrm{i}) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{4}(1+2t)$$

Bonus:

(a) *(1 Bonus-Punkt)* Damit das Konturintegral dasselbe Ergebnis wie das Integral I auf der reellen Achse liefert darf das Konturintegral in Form eines Halbkreises mit Radius R im Limes $R \to \infty$ keinen Beitrag liefern. Dies ist hier nur gewährleistet, wenn:

$$\mathrm{e}^{izt} \to 0, \quad \text{also, falls} \quad \mathrm{Im}(z) > 0 \text{ für } z \to \infty.$$

Im Detail:

$$e^{izt} = e^{\pm i|t|R(\cos\phi + i\sin\phi)} \overset{R\to\infty}{\sim} e^{\mp R|t|\sin\phi} \overset{!}{\to} 0$$
$$\text{mit } z(\phi) = Re^{i\phi} = R(\cos\phi + i\sin\phi) \text{ und } \phi \in [0, 2\pi]$$

Für $t > 0$ muss damit $\sin\phi > 0$, also $\phi \in [0, \pi]$ sein. Dies entspricht der oberen Halbebene.
Für $t < 0$ muss analog $\sin\phi < 0$, also $\phi \in [\pi, 2\pi]$ sein. Dies entspricht der unteren Halbebene.