Probeklausur: T0

Lösung Aufgabe 1: Linienintegral in kartesischen und krummlinigen Koordinaten

(a) *(2 Punkte)*

$$\gamma_1 : \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} a(1-t) \\ 0 \\ bt \end{pmatrix} \quad t \in [0,1]\,, \qquad \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = \int_0^1 \mathrm{d}t\, \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= \int_0^1 \mathrm{d}t \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} bt \\ 0 \\ a(1-t) \end{pmatrix} \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}t\ \left(-abt + ba(1-t)\right) \\
&= ab\left[-t^2 + t\right]_0^1 = 0
\end{aligned}$$

(b) *(2 Punkte)*

$$\gamma_2 : \mathbf{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} a\cos\varphi \\ 0 \\ b\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]\,, \qquad d_\varphi \mathbf{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} -a\sin\varphi \\ 0 \\ b\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi\, (d_\varphi \mathbf{r}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}(\varphi)) &= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \begin{pmatrix} -a\sin\varphi \\ 0 \\ b\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b\sin\varphi \\ 0 \\ a\cos\varphi \end{pmatrix} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi\ \left(-ab\sin^2\varphi + ab\cos^2\varphi\right) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi\ \left(ab\cos(2\varphi)\right) \\
&= ab\left[\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_0^{\pi/2} = 0
\end{aligned}$$

(c) *(1 Punkt)* Die Linienintegrale in (a) und (b) haben denselben Wert, da das Vektorfeld $\mathbf{F}$ konservativ ist ($\nabla \times \mathbf{F} = 0$), sodass alle Linienintegrale mit denselben Anfangs- und Endpunkten denselben Wert haben.

Lösung Aufgabe 2: Volumen und Trägheitsmoment eines Keilrings

(a) *(2 Punkte)* Volumen des Doppelkegels unter Verwendung von Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ):

$$\begin{aligned} V &= \int_0^R \mathrm{d}r\, r^2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \mathrm{d}\theta\, \sin\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \\ &= \frac{1}{3}R^3 \left[-\cos\frac{2}{3}\pi - (-\cos\frac{\pi}{3})\right] 2\pi \\ &= \frac{2}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

(b) *(3 Punkte)* Trägheitsmoment.
Abstand zur Drehachse:
$\mathbf{r}_\perp^2 = x^2 + y^2 = (r\sin\theta\cos\phi)^2 + (r\sin\theta\sin\phi)^2 = r^2\sin^2\theta(\cos^2\phi + \sin^2\theta)^2 = r^2\sin^2\theta$

Trägheitsmoment:

$$\begin{aligned} I &= \rho_0 \int \mathrm{d}V \mathbf{r}_\perp^2 \\ &= \rho_0 \int_0^R \mathrm{d}r\, r^4 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \mathrm{d}\theta\, \sin^3\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \end{aligned}$$

Berechne die Integrale:

- $\int_0^R \mathrm{d}r\, r^4 = \frac{1}{5}R^5$
- $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \mathrm{d}\theta\, \sin^3\theta = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \mathrm{d}\theta\, \sin\theta(1-\cos^2\theta) = -\int_{\cos\frac{\pi}{3}}^{\cos\frac{2}{3}\pi} \mathrm{d}u\,[1-u^2]$
  $= -[u - \frac{1}{3}u^3]_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} = -\left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\right] = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$
- $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi = 2\pi$

Alles einsetzen:

$$\begin{aligned} I &= \rho_0\, \frac{1}{5}R^5\, \frac{11}{12}\, 2\pi \\ &= \frac{M}{\frac{2}{3}\pi R^3}\, \frac{1}{5}R^5\, \frac{11}{12}\, 2\pi \\ &= \frac{11}{20}MR^2 \quad \rightarrow \quad a = \frac{11}{20} \end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 3: Basistransformation

(a) *(2 Punkte)* Abbildung A: Man sieht sofort, dass $\mathbf{e}_x$ auf $-\mathbf{e}_y$ abgebildet wird und $\mathbf{e}_y$ wird auf $-\mathbf{e}_x$ abgebildet. Dies liefert uns die Spalten unserer Matrix A.
Abbildung B: Wir definieren $\theta = \frac{\pi}{6}$ gilt $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} =: c$ und $\sin\theta = \frac{1}{2} =: s$. Damit gilt:

$$B = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \tag{1}$$

(b) *(1 Punkt)*

$$\mathbf{x}' = B\mathbf{x} \tag{2}$$

Das Inverse von B ergibt sich als Rotation in die entgegengesetzte Richtung

$$\mathbf{x} = B^{-1}\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}c + s \\ \sqrt{3}s + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \tag{3}$$

(c) *(2 Punkte)*

$$\tilde{\mathbf{x}}' = T\mathbf{x}' = AB\mathbf{x}' = \tag{4}$$

$$= \begin{pmatrix} -s & -c \\ -c & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}s - c \\ \sqrt{3}c + s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

$$\tilde{B} = TBT^{-1} = ABBB^{-1}A^{-1} = ABA^{-1} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \tag{7}$$

Lösung Aufgabe 4: Eigenwertproblem, Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren

(a) *(2 Punkte)* Eigenwerte:
Das charakteristische Polynom:

$$
\begin{aligned}
\det(A - \lambda \mathbb{1}) &= \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & -\mathrm{i}b \\ 1 & -1-\lambda & \mathrm{i}b \\ \mathrm{i}b & \mathrm{i}b & -2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (-1-\lambda)[-(-1-\lambda)(2+\lambda) - \mathrm{i}b^2] + (2+\lambda) - (\mathrm{i}b)^2 + \mathrm{i}b[\mathrm{i}b - \mathrm{i}b(-1-\lambda)] \\
&= (-1-\lambda)[-(-1-\lambda)(2+\lambda) - \mathrm{i}b^2] + (2+\lambda) - (\mathrm{i}b)^2 + (\mathrm{i}b)^2 - b^2(-1-\lambda)] \\
&= -(1+\lambda)[(1+\lambda)(2+\lambda) - (\mathrm{i}b)^2 - b^2] + (2+\lambda) \\
&= -(1+\lambda)^2(2+\lambda) + (2+\lambda) \\
&= (2+\lambda)(-(1+\lambda)^2 + 1) = (2+\lambda)(-(1+2\lambda+\lambda^2)+1) = \lambda(2+\lambda)^2 \stackrel{!}{=} 0
\end{aligned}
$$

Daraus folgt $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = -2$. Damit sind λ_2 und λ_3 entartet.

(b) *(2 Punkte)* A ist hermitesch, wenn $A = A^\dagger$.

$$
\begin{pmatrix} -1 & 1 & -\mathrm{i}b \\ 1 & -1 & \mathrm{i}b \\ \mathrm{i}b & \mathrm{i}b & -2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -\mathrm{i}b \\ 1 & -1 & -\mathrm{i}b \\ +\mathrm{i}b & -\mathrm{i}b & -2 \end{pmatrix} \quad \to \quad b \stackrel{!}{=} 0
$$

Damit gilt

$$
A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}
$$

Nun zur Bestimmung der Eigenvektoren:
Der Eigenvektor $\mathbf{v}_1$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$ ergibt sich aus

$$
(A - 0\mathbb{1})\,\mathbf{v}_1 = 0.
$$

Daraus ergibt sich das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
-1v^1_{\ 1} + 1v^2_{\ 1} &= 0 \\
1v^1_{\ 1} - 1v^2_{\ 1} &= 0 \\
-2v^3_{\ 1} &= 0
\end{aligned}
$$

Eine Komponente von $\mathbf{v}_1$ kann wie erwartet frei gewählt werden, z.B. $v^1_{\ 1} = 1$, sodass $v^2_{\ 1} = 1$, zudem gilt $v^3_{\ 1} = 0$. Damit ist der normierte Eigenvektor

$$
\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Der Eigenwert $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$ ist entartet. Aus

$$
(A + 2\mathbb{1})\,\mathbf{v}_j = 0
$$

mit $j = 2, 3$ ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
1v^1_j + 1v^2_j + 0v^3_j &= 0 \\
1v^1_j + 1v^2_j + 0v^3_j &= 0 \\
0v^1_j + 0v^2_j + 0v^3_j &= 0
\end{aligned}$$

in dem die ersten beiden Gleichungen equivalent sind und die dritte Gleichung für beliebige $\mathbf{v}_j$ erfüllt ist. Es können also zwei Komponenten des Eigenvektors frei gewählt werden. Somit können zwei linear unabhängige Eigenvektoren konstruiert werden. Klug gewählt, da bereits orthonormiert, wäre

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ansonsten geht z.B. auch

$$\mathbf{v'}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v'}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Vektoren sind linear unabhängig voneinander und lösen die Gleichung, sind aber nicht orthogonal, da $\mathbf{v'}_2 \cdot \mathbf{v'}_3 = 2$. Sie sind aber selbstverständlich beide orthogonal zu $\mathbf{v}_1$. Die Orthonormierung erfolgt nun mit dem Gram-Schmidt Verfahren:

$$\mathbf{v''}_3 = \mathbf{v'}_3 - \mathbf{v'}_1 \left(\frac{\mathbf{v'}_1 \cdot \mathbf{v'}_3}{|\mathbf{v'}_1|^2} \right) - \mathbf{v'}_2 \left(\frac{\mathbf{v'}_2 \cdot \mathbf{v'}_3}{|\mathbf{v'}_2|^2} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{2}{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In der Tat sind $\mathbf{v'}_2$ und $\mathbf{v''}_3$ orthogonal, da $\mathbf{v'}_2 \cdot \mathbf{v''}_3 = 0$. Normierung:

$$\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{v'}_2}{|\mathbf{v'}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{v''}_3}{|\mathbf{v''}_3|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) *(1 Punkt)* Diagonalisierende Ähnlichkeitstransformation:
$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ bilden nun eine ONB des $\mathbb{R}^3$. Da A symmetrisch ist und wir die Eigenvektoren orthonormal gewählt haben, ist die Transformationsmatrix $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ orthogonal und somit ist

$$S^{-1} = S^T = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \mathbf{v}_3^T \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Lösung Aufgabe 5: Taylorreihe und Lagrange-Multiplikatoren

(a) *(2 Punkte)*

$$\begin{aligned}
f(x,y) =& \cos^2\left(x+y+x^2\right)\\
=& \left(1-\frac{1}{2}\left(x+y+x^2\right)^2\right)^2 + \mathcal{O}\left(x^3,y^3,x^2y,xy^2\right)\\
=& 1-\left(x+y+x^2\right)^2 + \mathcal{O}\left(x^3,y^3,x^2y,xy^2\right)\\
=& 1-x^2-y^2-2xy + \mathcal{O}\left(x^3,y^3,x^2y,xy^2\right)
\end{aligned}$$

(b) *(3 Punkte)*

$$\begin{aligned}
A =& 2p_1 \cdot 2p_2\\
\tilde{A} =& 4p_1p_2 - \lambda\left(\frac{p_1^2}{a^2}+\frac{p_2^2}{b^2}-1\right)\\
\partial_{p_1}\tilde{A} =& 4p_2 - 2\lambda\frac{p_1}{a^2} \stackrel{!}{=} 0\\
\partial_{p_2}\tilde{A} =& 4p_1 - 2\lambda\frac{p_2}{b^2} \stackrel{!}{=} 0\\
\Rightarrow \frac{p_2^2}{b^2} =& \frac{p_1^2}{a^2}
\end{aligned}$$

Einsetzen in Nebenbedingung liefert

$$\frac{p_1}{a} = \frac{p_2}{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Die maximale Fläche ist somit: $A = 4\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{b}{\sqrt{2}} = 2ab$.

Lösung Aufgabe 6: Differentialgleichung mit Substitution und Separation der Variablen

(a) *(3 Punkte)* separable Differentialgleichung mittels Substitution:

$$\begin{aligned} y(x) &= x \sin u(x) \\ \frac{y}{x} &= \sin u(x) \\ u(x) &= \arcsin{(y/x)} \end{aligned}$$

Damit lässt sich die Differentialgleichung $y' = y/x + \sqrt{1-(y/x)^2}$ mit Hilfe von

$y'(x) = \sin u(x) + x \cos u(x)\, u'(x)$ und $y'(x) = \sin u(x) + \sqrt{1-\sin^2 u(x)} = \sin u(x) + \cos u(x)$

umschreiben zu

$$\begin{aligned} \sin u(x) + x \cos u(x)\, u'(x) &= \sin u(x) + \cos u(x) \\ xu'(x) &= 1 \\ \mathrm{d}u &= \frac{\mathrm{d}x}{x} \end{aligned}$$

Anfangsbedingung:
$x_0 = 1,\ y_0 = y(x_0) = 0$ und damit $u_0 = u(x_0) = \arcsin\left(\frac{y_0}{x_0}\right) = \arcsin 0 = 0$, da $0 \le u(x) < \pi/2$

(b) *(2 Punkte)* Lösung der Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \int_{u_0=0}^{u} \mathrm{d}\tilde{u} &= \int_{x_0=1}^{x} \frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\tilde{x}} \\ u(x) &= \ln x - \ln 1 \\ y(x) &= x \sin u(x) = x \sin(\ln x) \end{aligned}$$