LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Fakultät für Physik
R: Rechenmethoden für Physiker, WiSe 2014/15
Dozent: Jan von Delft
Übungen: Benedikt Bruognolo, Katharina Stadler

http://homepages.physik.uni-muenchen.de/~vondelft/Lehre/14t0/

Nachklausur: T0

Datum: Dienstag 31.03.2015

Hausaufgabe 1: Rechnen mit Vektoren (**)

(a) [2] Zerlegen Sie den Vektor $\mathbf{a} = (1, 0, 3)^T$ in einen Vektor $\mathbf{a}_\parallel$ und einen Vektor $\mathbf{a}_\perp$ senkrecht zum Vektor $\mathbf{b} = (-2, 2, 1)^T$.

(b) [1] Bestimmen Sie einen Vektor $\mathbf{c}$ orthogonal zu $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$.

(c) [2] Gegeben sei die Orthonormalbasis

$$\mathbf{e}'_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T, \quad \mathbf{e}'_2 = \tfrac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2)^T, \quad \mathbf{e}'_3 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1)^T.$$

Wie sieht die Darstellung des Vektors $\mathbf{d} = (3, -1, 1)$ als Linearkombination der orthonormalen Basisvektoren aus?

Hausaufgabe 2: Partielle Ableitungen, Gradient, "Mexican-hat potential" (**)

Gegeben sei die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(\mathbf{r}) = (r^2 - a^2)^2$ mit $\mathbf{r} = (x, y)^T$, $r^2 \equiv x^2 + y^2$ und $a \in \mathbb{R}$.

(a) [1] Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen erster Ordnung.

(b) [1] In welche Richtung steigt die Funktion am Punkt $\mathbf{r} = (x, y)^T$ am steilsten an?

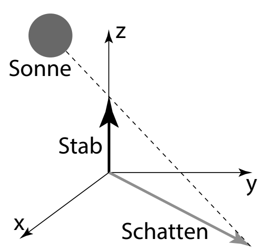
(c) [2] Wo ist die Funktion am flachsten?

(d) [1] Finden Sie eine Gleichung für die Konturlinie auf Höhe $h(\mathbf{r}) = H(> 0)$. Es reicht aus, wenn Sie einen Ausdruck der Form, $r^2 = \ldots$, angeben. Welche Form haben die Konturlinien?

(e) (Bonus [1]) Skizzieren Sie qualitativ jeweils die Konturlinien für $H = a^2$ und $H = a^6$, mit $a = 2$. Erstellen Sie hierzu bitte zwei separate Skizzen.

Hausaufgabe 3: Lineare Abbildungen, Basistransformation: Sonnenuhr (**)

Eine Sonnenuhr bestehe aus einem vertikalen Stab, dessen Schatten auf die x-y-Ebene fällt (siehe Skizze). Der Stab sei im Ursprung $(0, 0, 0)^T$ befestigt, seine Spitze befinde sich am Punkt $\mathbf{x} = (0, 0, 2)^T$. Der Schatten des Stabes beginne ebenfalls am Ursprung und ende am Punkt $\mathbf{y} = (2, 2, 0)^T$.



(a) [1] $\hat{A}$ sei die linearen Abbildung in drei Dimensionen, die den Stab auf seinen Schatten abbildet, sowie jeden Vektor in der x-y-Ebene auf sich selbst. Finden Sie die Matrixdarstellung A dieser Abbildung bezüglich der Standardbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. [Hinweis zur Ergebniskontrolle: Überprüfen Sie, dass $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$.]

(b) [1] (Bonus) Zeigen Sie mathematisch, dass $\hat{A}$ nicht invertierbar ist. Erklären Sie den Grund dafür anschaulich.

Betrachten Sie nun folgende Orthonormalbasis (mit Basisvektor $\mathbf{v}_2$ parallel zum Schatten):

$$\mathbf{v}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T, \quad \mathbf{v}_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^T, \quad \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)^T.$$

$\hat{T}$ sei die Transformation von dieser Basis auf die Standardbasis, $\mathbf{v}_j \overset{\hat{T}}{\mapsto} \mathbf{e}_j = \mathbf{v}_i T^i_{\ j}$.

(c) [1] Finden Sie die Matrixelemente $T^i_{\ j}$ dieser Transformation.

(d) [1] Welche Koordinaten $\tilde{\mathbf{x}}$ und $\tilde{\mathbf{y}}$ haben die Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ in der $\mathbf{v}$-Basis?

(e) [1] Finden Sie die Matrixdarstellung $\tilde{A}$ der Abbildung $\hat{A}$ bezüglich der $\mathbf{v}$-Basis.

(f) [1] Berechnen Sie $\tilde{A}\tilde{\mathbf{x}}$. Warum ist das Ergebnis nicht überraschend?

Hausaufgabe 4: Diagonalisierung einer 3×3 Matrix (**)

(a) [4] Finden Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Eigenwerte $\lambda_j \in \mathbb{C}$ und normierten Eigenvektoren $\mathbf{v}_j \in \mathbb{C}^3$.

(b) [1] Konstruieren Sie mit den Ergebnissen aus (a) eine diagonalisierende Ähnlichkeitstransformation S, für die $S^{-1}AS$ diagonal ist.

(c) [1] (Bonus) Finden Sie auch die Inverse S^{-1}.

Hausaufgabe 5: Wegintegral (**)

Ein Papierflieger segelt auf einer Spiralbahn den Hörsaal hinab, die in kartesischen Koordinaten durch

$$\mathbf{r}_1(t) = \left(R(1-t)\cos(2\pi n t),\ R(1-t)\sin(2\pi n t),\ H(1-t)\right)^T$$

mit $t \in [0, 1]$ gegeben ist, wobei n eine positive ganze Zahl ist. Ein Luftzug verursacht eine Strömungen, die durch das Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \rho z \mathbf{e}_\phi + z^2 \mathbf{e}_z$ (mit den üblichen Notationen der Zylinderkoordinaten) beschrieben wird.

(a) [1] Die Bahn des Fliegers nimmt in Zylinderkoordinaten die Form $\mathbf{r}_1(t) = \rho(t)\mathbf{e}_\rho(t) + z(t)\mathbf{e}_z$ an. Wie lauten $\rho(t), \phi(t)$ und $z(t)$?

(b) [3] Berechnen Sie die Arbeit $W_1 = \int \mathrm{d}\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}_1)$, die die Strömung verrichtet.

(c) [1] Ist die verrichtete Arbeit in (b) abhängig vom gewählten Weg? Begründen Sie.

Hinweis: Rotation in Zylinderkoordinaten

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{e}_\rho \left[\frac{1}{\rho}\partial_\phi F_z - \partial_z F_\phi\right] + \mathbf{e}_\phi \left[\partial_z F_\rho - \partial_\rho F_z\right] + \mathbf{e}_z \frac{1}{\rho}\left[\partial_\rho \left(\rho F_\phi\right) - \partial_\phi F_\rho\right] .$$

Hausaufgabe 6: Volumenintegral über Kegel (**)

[5] Berechnen Sie in Zylinderkoordinaten das Volumenintegral

$$I = \int_K \mathrm{d}V [x^2 + y^2]^{3/2}$$

über einen auf der z-Achse zentrierten Kegel, $K = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \le z \le a, x^2 + y^2 \le 4z^2\}$, wobei a eine positive reelle Konstante ist.

Hausaufgabe 7: Lagrange-Multiplikatoren (**)

[5] Ein Hersteller möchte sein Produkt in einer rechteckigen Schachtel mit Seitenlängen x, y und z möglichst materialsparend verpacken, d.h. die Oberfläche $O = 2(xy + xz + yz)$ der Schachtel soll bei vorgegebenem Volumen $V = xyz$ minimal sein. Finden Sie mittels Lagrange-Multiplikatoren die optimale Form der Schachtel, d.h. die optimalen Werte von x, y und z, ausgedrückt durch V.

Hausaufgabe 8: Fourier-Reihen (**)

Gegeben ist eine periodische Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{falls} \quad -\pi \le x < 0, \\ 5x, & \text{falls} \quad 0 \le x < \pi, \end{cases} \qquad \text{und } f(x + 2\pi) = f(x).$$

(a) [1] Skizzieren Sie die Funktionen. Zeichnen Sie explizit die Werte von $f(0)$ und $f(2\pi)$ ein.

(b) [4] Bestimmen Sie die Fourier-Reihe für die periodische Funktion, d. h. berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten $\tilde{f}_n$ in der Darstellung $f(x) = \frac{1}{L}\sum_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n x}\tilde{f}_n$. Wie sind k_n und L jeweils zu wählen?

Hausaufgabe 9: Stabilitätsanalyse in zwei Dimensionen (**)

Betrachten Sie die Differentialgleichung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - 1 \\ y \sin(x) \end{pmatrix}; \quad x, y \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}].$$

(a) [0.5] Finden Sie den Fixpunkt $(x^*, y^*)^T$ der Differentialgleichung.

(b) [1.5] Zeigen Sie, dass die linearisierte Differentialgleichung für kleine Auslenkungen $(\eta_x, \eta_y)^T = (x - x^*, y - y^*)^T$ um den Fixpunkt folgende Form hat:

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta}_x \\ \dot{\eta}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{pmatrix} .$$

(c) [3] Diskutieren Sie die Stabilitätseigenschaften des Fixpunkts: Für welche Auslenkungsrichtungen relativ zum Fixpunkt wächst bzw. zerfällt eine Auslenkung am schnellsten?

Hausaufgabe 10: Differentialgleichungen, verschiedene Lösungsmethoden

Lösen Sie folgende Differentialgleichung:

$$\dot{x} + \frac{2}{1+t}x = \frac{2t}{1+t} \ , \quad \text{mit} \quad x(0) = 1 \ . \tag{1}$$

(a) [2] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung.

(b) [2] Finden Sie dann durch Variation der Konstanten eine spezielle (partikuläre) Lösung des inhomogenen Problems.

(c) [1] Wie lautet die Lösung der Differentialgleichung (1)?

Hausaufgabe 11: Flussintegral eines Vektorfeldes in krummlinigen Koordinaten (**)

Betrachten Sie folgendes Vektorfeld in Kugelkoordinaten: $\mathbf{A} = \frac{1}{r}\sin^2(\theta)\ \mathbf{e}_\phi$.

(a) [3] Berechnen Sie explizit den Fluss $\Phi = \int_S d\mathbf{S}\cdot\mathbf{B}$ von $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$ durch die Fläche $S = \{\mathbf{r}\in\mathbb{R}^3\,|\,x^2+y^2+z^2 = R^2, z > \frac{R}{2}\}$. (Die Orientierung der Fläche sei durch die Vorgabe festgelegt, dass der Normalvektor für jedes Flächenelement $\mathrm{d}\mathbf{S}$ nach oben zeige, d.h. eine positive z-Komponente habe.)

Hinweis: Für ein Vektorfeld in Kugelkoordinaten, $\mathbf{A}(r,\theta,\phi) = A_r\,\mathbf{e}_r + A_\theta\,\mathbf{e}_\theta + A_\phi\,\mathbf{e}_\phi$ berechnet sich die Rotation wie folgt:

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{[\partial_\theta(A_\phi\sin(\theta)) - \partial_\phi A_\theta]}{r\sin(\theta)}\mathbf{e}_r + \left[\frac{\partial_\phi A_r}{r\sin(\theta)} - \frac{1}{r}\partial_r(rA_\phi)\right]\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\partial_r(rA_\theta) - \partial_\theta A_r\right]\mathbf{e}_\phi$$

(b) [2] Verwenden Sie den Satz von Stokes um den Fluss durch ein Linienintegral auszudrücken, und berechnen Sie dieses ebenfalls explizit.

Hausaufgabe 12: Residuensatz (**)

Betrachten Sie die Funktion

$$h(z) = \frac{z}{(z-\mathrm{i})^2(z+2\mathrm{i})}.$$

(a) [3] Berechnen Sie die Residuen zu allen Polstellen von $h(z)$.

(b) [1] Berechnen Sie das Integral $I_1 = \oint \mathrm{d}z\, h(z)$ für die Kontur γ_1: ein Kreis mit Radius $R = 3$ um den Ursprung, durchlaufen in der mathematisch positiven Richtung.

(c) [1] Berechnen Sie das Integral $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\, h(x)$, mittels Schließen des Integrationswegs mit einem Halbkreis mit Radius $R\to\infty$. Skizzieren Sie den von Ihnen gewählten Integrationsweg. (Sie brauchen die Wahl nicht zu begründen.)

Hinweis: Das Residuum einer analytischen Funktion $f(z)$ an einem Pol n-ter Ordnung bei z_0 ist gegeben durch

$$\mathrm{Res}\,(f(z), z_0) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\Big((z-z_0)^n f(z)\Big)$$