Probeklausur: T0

Lösung Aufgabe 1: Linienintegral in kartesischen und krummlinigen Koordinaten (**)

(a) *(2 Punkte)*

$$\gamma_1 : \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} a(1-t) \\ 0 \\ bt \end{pmatrix} \quad t \in [0,1]\,, \qquad \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = \int_0^1 \mathrm{d}t\, \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= \int_0^1 \mathrm{d}t \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} bt \\ 0 \\ a(1-t) \end{pmatrix} \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}t\ \left(-abt + ba(1-t)\right) \\ &= ab\left[-t^2 + t\right]_0^1 = 0 \end{aligned}$$

(b) *(2 Punkte)*

$$\gamma_2 : \mathbf{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} a\cos\varphi \\ 0 \\ b\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]\,, \qquad d_\varphi \mathbf{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} -a\sin\varphi \\ 0 \\ b\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi\, (d_\varphi \mathbf{r}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}(\varphi)) &= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \begin{pmatrix} -a\sin\varphi \\ 0 \\ b\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b\sin\varphi \\ 0 \\ a\cos\varphi \end{pmatrix} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi\ \left(-ab\sin^2\varphi + ab\cos^2\varphi\right) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi\ \left(ab\cos(2\varphi)\right) \\ &= ab\left[\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_0^{\pi/2} = 0 \end{aligned}$$

(c) *(1 Punkt)* Die Linienintegrale in (a) und (b) haben denselben Wert, da das Vektorfeld $\mathbf{F}$ konservativ ist ($\nabla \times \mathbf{F} = 0$), sodass alle Linienintegrale mit denselben Anfangs- und Endpunkten denselben Wert haben.

Lösung Aufgabe 2: Volumen einer Schüsselwand (**)

(a) *(1.5 Punkte)* Integrationsbereiche:

$$r \in [R_i(\theta), R], \theta \in [0, \pi/2], \phi \in [0, 2\pi]$$

(b) *(3.5 Punkte)* Volumen

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \, \sin\theta \int_{R_i(\theta)}^{R} \mathrm{d}r \, r^2 \\
&= 2\pi \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \, \sin\theta \, \frac{1}{3}[r^3]_{R_i(\theta)}^{R} \\
&= 2\pi \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \, \sin\theta \, \frac{R^3}{3}[1 - (1 - \frac{1}{4}\cos\theta)^3] \\
&= \frac{2\pi R^3}{3} \int_0^1 \mathrm{d}u \, [1 - (1 - \frac{1}{4}u)^3] = \frac{2\pi R^3}{3}\left[u + (1 - \frac{1}{4}u)^4\right]_0^1 = \frac{2\pi R^3}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{27}{128}\pi R^3
\end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 3: Diagonalisierung einer 2×2 Matrix (**)

(a) *(1 Punkt)* $0 \overset{!}{\neq} \det A = 1 - (-2a + 1)^2 = 1 - 4a^2 + 4a - 1 = -4a(a - 1)$.
Die Matrix A ist also für $a = 0$ und $a = 1$ nicht invertierbar.

(b) *(3 Punkte)* Charakteristisches Polynom $\overset{!}{=} 0$

$$\begin{aligned}
0 \overset{!}{=} \det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & -2a + 1 \\ -2a + 1 & -1 - \lambda \end{pmatrix} &= (1 + \lambda)^2 - (-2a + 1)^2 = 1 + 2\lambda + \lambda^2 - (4a^2 - 4a + 1) \\
&= \lambda^2 + 2\lambda - 4a^2 + 4a \\
\lambda_{1,2} &= -\frac{2}{2} \pm \frac{\sqrt{4 - 4(-4a^2 + 4a)}}{2} = -1 \pm (2a - 1)
\end{aligned}$$

Daraus folgen die Eigenwerte $\lambda_1 = -2a$ und $\lambda_2 = 2a - 2$.

normierte Eigenvektoren:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 = -2a : \quad & \begin{pmatrix} -(-2a + 1) & -2a + 1 \\ -2a + 1 & -(-2a + 1) \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \\
& \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\lambda_2 = 2a - 2 : \quad & \begin{pmatrix} -2a + 1 & -2a + 1 \\ -2a + 1 & -2a + 1 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \\
& \Rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(c) *(1 Punkt)*
Für $a = \frac{1}{2}$ erhält man $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

Bonus:

(d) *(1 Punkt)* Die Transformationsmatrix S mit der Eigenschaft, dass $S^{-1}AS$ diagonal ist, hat die Eigenvektoren als Spaltenvektore (Reihenfolge beliebig), und da die Eigenvektoren normiert sind und A reell symmetrisch ist, gilt $S^{-1} = S^T$. Somit

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = S^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung Aufgabe 4: Basistransformation (**)

(a)

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} s & -s \\ s & s \end{pmatrix}, \quad s = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

(b)

$$\mathbf{y} = AB\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & -s \\ s & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

(c) Sei $\mathbf{y} = C\mathbf{x}$, wobei $\mathbf{y}$ und $\mathbf{x}$ von der Basistransformation abbildet werden auf $\mathbf{y}' = T\mathbf{y}$ und $\mathbf{x}' = T\mathbf{x}$. Dann gilt

$$\mathbf{y}' = T\mathbf{y} = TC\mathbf{x} = TCT^{-1}T\mathbf{x} = \underbrace{TCT^{-1}}_{\equiv C'}\mathbf{x}' \equiv C'\mathbf{x}' \tag{3}$$

Also ist die Darstellung von C in der neuen Basis gegeben durch:

$$C' = TCT^{-1} = BCB^{-1} = \begin{pmatrix} s & -s \\ s & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & s \\ -s & s \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$= \begin{pmatrix} s & -s \\ s & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -s & s \\ s & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s^2 & 0 \\ 0 & 2s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Lösung Aufgabe 5: Differentialgleichungen (**)

(a) Durch Trennung der Variablen erhalten wir:

$$(t^2+4)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = tx \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}t\frac{t}{t^2+4} \tag{6}$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\tilde{x}} = \int_{t_0}^{t}\frac{\tilde{t}\mathrm{d}\tilde{t}}{\tilde{t}^2+4} \tag{7}$$

$$\ln\tilde{x}\ |_{x_0}^{x} = \frac{1}{2}\ln(\tilde{t}^2+4)\ |_{t_0}^{t} \tag{8}$$

$$\ln\frac{x}{x_0} = \frac{1}{2}\ln\frac{t^2+4}{t_0^2+4} \tag{9}$$

Mit Hilfe der Anfangsbedingungen erhalten wir:

$$x_0 = x(t_0 = 0) = 1 \Rightarrow$$

$$\ln x = \frac{1}{2}\ln\frac{t^2+4}{4} \Rightarrow$$

$$x(t) = \sqrt{\frac{t^2}{4}+1} \tag{10}$$

(b) Mit Hilfe des Ansatzes $g_p(t) = C(t)e^{-t}$ erhalten wir:

$$\dot{C}(t)e^{-t} = e^t \Rightarrow C(t) \int e^{2t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}e^{2t} + const. \tag{11}$$

Die Konstante kann in die homogene Lösung gezogen werden, so dass sich als Resultat

$$g_p(t) = \frac{1}{2}e^t \tag{12}$$

ergibt. Die allgmeine Lösung ist somit:

$$g(t) = g_h(t) + g_p(t) = Ce^{-t} + \frac{1}{2}e^t \tag{13}$$

$$g(0) = 0 \Rightarrow C + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{2} \tag{14}$$

$$\Rightarrow g(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} = \sinh t \tag{15}$$

Lösung Aufgabe 6: Taylor-Reihe und Lagrange-Multiplikatoren (**)

(a)

$$\begin{aligned} f(x,y) =& \mathrm{e}^{x+y^2} = 1 + x + y^2 + \frac{1}{2}\left(x+y^2\right)^2 + \mathcal{O}\left(x^2, y^2, xy\right) \\ =& 1 + x + y^2 + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}\left(x^2, y^2, xy\right) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} V =& 8x_py_pz_p \\ \tilde{V} =& 8x_py_pz_p - \lambda\left(\frac{x_p^2}{a^2} + \frac{y_p^2}{b^2} + \frac{z_p^2}{c^2} - 1\right) \\ \partial_{x_p}\tilde{V} =& 8y_pz_p - 2\lambda\frac{x_p}{a^2} \stackrel{!}{=} 0 \\ \partial_{y_p}\tilde{V} =& 8x_pz_p - 2\lambda\frac{y_p}{b^2} \stackrel{!}{=} 0 \\ \partial_{z_p}\tilde{V} =& 8x_py_p - 2\lambda\frac{z_p}{c^2} \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Wäre eine der Komponenten x_p , y_p oder z_p gleich null, würde unmittelbar $x_p = y_p = z_p = 0$ folgen. Da dieser Punkt nicht auf dem Ellipsoid liegt, sind alle Komponenten ungleich null.
Aus der ersten Gleichung folgt dann $\lambda = \frac{4a^2y_pz_p}{x_p}$.
Die anderen beiden Gleichungen werden damit zu

$$\begin{aligned} 8x_pz_p &- \frac{8a^2y_p^2z_p}{x_pc^2} \\ 8x_py_p &- \frac{8a^2y_pz_p^2}{x_pc^2} \end{aligned}$$

Das ist äquivalent zu

$$\frac{x_p^2}{a^2} = \frac{y_p^2}{b^2}$$
$$\frac{x_p^2}{a^2} = \frac{z_p^2}{c^2}$$

Wir erhalten also

$$\frac{x_p^2}{a^2} = \frac{y_p^2}{b^2} = \frac{z_p^2}{c^2}$$

Einsetzen in Nebenbedingung liefert

$$x_p = \frac{a}{\sqrt{3}}\,,\ y_p = \frac{b}{\sqrt{3}}\,,\ z_p = \frac{c}{\sqrt{3}}\,.$$

Das maximale Volumen ist somit: $V = 8\frac{a}{\sqrt{3}}\frac{b}{\sqrt{3}}\frac{c}{\sqrt{3}} = \frac{8}{3\sqrt{3}}abc.$