http://homepages.physik.uni-muenchen.de/~vondelft/Lehre/15r/

Blatt 15.3 (optional): Komplexe Analysis

Ausgabe: Freitag, 05.02.16 Abgabe: Keine
(b)[2](E/M/A) bedeutet: Aufgabe (b) zählt 2 Punkte und ist einfach/mittelschwer/anspruchsvoll
Beispielaufgaben: {T}: wird im Tutorien besprochen; {S}: Selbststudium.

Beispielaufgabe 1: Caucy-Riemann-Gleichungen [2]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E). [T]

Schreiben Sie folgende Funktionen von $z = x + \mathrm{i}y$ bzw. $\bar{z} = x - \mathrm{i}$ in die Form $f(x, y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ und überprüfen Sie explizit, ob die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllt sind. Welche der Funktionen ist analytisch in z?

(a) $f(z) = \mathrm{e}^z\,,$ (b) $f(z) = \bar{z}^2.$

Beispielaufgabe 2: Satz von Cauchy [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[2](E). [T]

Die Funktion $f(z) = \mathrm{e}^z$ für $z \in \mathbb{C}$ ist analytisch. Folglich müssen nach dem Satz von Cauchy (a) geschlossene Wegintegrale über einem einfach zusammenhängenden Gebiet Null ergeben, und (b) Wegintegrale zwischen zwei Punkten nicht vom gewählten Weg abhängen. Überprüfen Sie diese Aussagen explitiz durch Berechnung folgender komplexer Wegintegrale:

(a) $I_{\gamma_R} = \oint_{\gamma_R} \mathrm{d}z\, f(z)$, entlang des Kreises γ_R mit Radius R um den Ursprung $z = 0$.

(b) $I_{\gamma_i} = \int_{\gamma_i} \mathrm{d}z\, f(z)$, zwischen den Punkten $z_0 = 0$ und $z_1 = 1 - \mathrm{i}$, entlang (i) der geraden Strecke $\gamma_1(t) = (1 - \mathrm{i})t$ und (ii) der Kurve $\gamma_2(t) = t^3 - \mathrm{i}t$, mit $t \in [0, 1]$. Berechnen Sie auch explizit die Differenz $F(z_1) - F(z_0)$, wobei $F(z)$ die Stammfunktion von $f(z)$ ist.

Beispielaufgabe 3: Laurent-Reihe, Residuum [2]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[0.5](E); (c)[1](E). [T]

$p(z)$ sei ein Polynom der Ordnung $k \geq 0$ auf $\mathbb{C}$, dann ist $f_m(z) = \frac{p(z)}{(z-z_0)^m}$ (mit $m \geq 1$) eine analytische Funktion auf $\mathbb{C}\backslash z_0$, mit einem Pol der Ordnung m bei z_0.

(a) Zeigen Sie mittels der Taylor-Reihe von $p(z)$ bezüglich z_0, dass die Laurent-Reihe von $f_m(z)$ folgende Form hat:

$$f_m(z) = \sum_{n=-m}^{k-m} \frac{p^{(n+m)}(z_0)}{(n+m)!}(z - z_0)^n\,, \quad \text{mit} \quad p^{(n)}(z_0) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} p(z)\bigg|_{z=z_0}.$$

(b) Finden Sie für $f_m(z) = \frac{z^3}{(z-2)^m}$ die Laurent-Reihe bezüglich des Pols bei $z_0 = 2$.

(c) Finden Sie für $m = 1, 2, 3, 4$ und 5 das Residuum von $f_m(z) = \frac{z^3}{(z-2)^m}$ bezüglich des Pols bei $z_0 = 2$, mittels der Formel $\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]$.
[Ergebniskontrolle: sind die Residuen von (c) konsistent mit der Laurent-Reihe von (b)?]

Beispielaufgabe 4: Residuensatz [4]

(a) Berechnen Sie die Integrale $I_+^{(k)} = \oint_{k \text{ mal: } |z|=R} \frac{\mathrm{d}z}{z}$ und $I_-^{(k)} = \oint_{k \text{ mal: } |z|=R} \frac{\mathrm{d}z}{z}$,

wobei für $I_+^{(k)}$ (bzw. $I_-^{(k)}$) ein Kreis mit Radius R um den Ursprung k mal in mathematisch positive (bzw. negative) Richtung, d.h. gegen (bzw. entlang dem) Uhrzeigersinn, durchlaufen wird. Nutzen Sie dazu nicht den Residuensatz, sondern berechnen Sie die Integrale direkt mittels der Parametrisierung $z(\phi) = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ und einer geeigneten Wahl des Integrationsintervalls für ϕ.

Berechnen Sie folgende geschlossenen Wegintegrale in der komplexen Ebene, für $0 < a \in \mathbb{R}$:

(b) $I_1(a) = \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \mathrm{d}z\, g(z)\,, \qquad I_2(a) = \oint_{2 \text{ mal: } |z|=2} \mathrm{d}z\, g(z)\,, \quad$ mit $\quad g(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{z^2+1}\,.$

(c) $I_3(a) = \oint_{|z|=4} \mathrm{d}z\, f(z)\,, \qquad$ mit $\quad f(z) = \dfrac{z}{z^3 + (a\mathrm{i} - 6)z^2 + (9 - 6a\mathrm{i})z + 9a\mathrm{i}}\,.$

Hinweis: Eine der Pole von $f(z)$ liegt bei $z_1 = -a\mathrm{i}$.

[Kontrollergebnisse: (b) $I_2(\ln 2) = 3\pi$, (c) $I_3(1) = 0$, $I_3(6) = \frac{4\pi}{25}(1 + \frac{4}{3}\mathrm{i})$.]

Beispielaufgabe 5: Integration durch Schließung der Kontur und Residuensatz [3]
Punkte: [3](A).

Berechnen Sie folgendes Integral, mit $a, b \in \mathbb{R}$, durch Schließung der Kontur entlang eines geeignet gewählten Halbkreises mit Radius $\to \infty$:

$$I(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \frac{1}{x^2 - 2xa + a^2 + b^2}\,.$$

[Kontrollergebnis: $I(-1, -2) = \frac{\pi}{2}$.]

Beispielaufgabe 6: Residuensatz [3]
Punkte: (a)[1.5](E); (b)[0.5](E); (c)[1](M).

Betrachten Sie die Funktion

$$h(z) = \frac{z}{(z-\mathrm{i})^2(z+2\mathrm{i})}.$$

(a) Berechnen Sie die Residuen zu allen Polstellen von $h(z)$.

(b) Berechnen Sie das Integral $I_1 = \oint \mathrm{d}z\, h(z)$ für die Kontur γ_1: ein Kreis mit Radius $R = 3$ um den Ursprung, durchlaufen in der mathematisch positiven Richtung.

(c) Berechnen Sie das Integral $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, h(x)$ durch Schließung des Integrationswegs mit einem Halbkreis mit Radius $R \to \infty$. Skizzieren Sie den von Ihnen gewählten Integrationsweg.

Hinweis: Das Residuum einer analytischen Funktion $f(z)$ an einem Pol n-ter Ordnung bei z_0 ist gegeben durch

$$\text{Res}\,(f(z), z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} \Big((z-z_0)^n f(z) \Big)$$

Beispielaufgabe 7: Fourier-Rücktransformation mittels Konturintegral [4]
Punkte: [4](A).

(a) Die Fourier-Transformierte der durch die Differentialgleichung $(\mathrm{d}_t + a)G(t) = \delta(t)$ (mit $0 < a \in \mathbb{R}$) definierten Green'schen Funktion lautet $\tilde{\mathcal{G}}(\omega) = (a - \mathrm{i}\omega)^{-1}$ (vergleiche Blatt 12, Aufgabe 4). Zeigen Sie, dass die entsprechende Fourier-Rücktransformation folgendes Ergebnis liefert:

$$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{a - \mathrm{i}\omega} = \theta(t)\,\mathrm{e}^{-at}\,, \quad \text{mit} \quad \theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0\,, \\ 0 & \text{für } t < 0\,. \end{cases}$$

(b) Die Fourier-Transformierte der Exponentialfunktion, $\tilde{L}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \mathrm{e}^{-a|t|} = \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$ (mit $0 < a \in \mathbb{R}$), ist eine Lorentz-Kurve. Finden Sie die Fourier-Rücktransformierte, $L(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tilde{L}(\omega)$, mittels expliziter Berechnung des Integrals.

Hinweis: Berechnen Sie die Integrale für $t \neq 0$ als komplexe Wegintegrale, durch Schließung der Kontur entlang eines geeignet gewählten Halbkreises mit Radius $\to \infty$.

Beispielaufgabe 8: Residuensatz [4]

Betrachten Sie die Funktion $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+4)(z^2+a^2)}$, mit $a \in \mathbb{R}$, $3 \leq a < 4$.

(a) Bestimmen Sie die Residuen der Funktion f an allen ihrer Polen.

Berechnen Sie die Integrale $I_{\gamma_i}(a) = \int_{\gamma_i} \mathrm{d}z\, f(z)$ für folgende Integrationswege:

(b) γ_1: ein Kreis mit Radius $R = 1$ um den Ursprung, durchlaufen im Gegenuhrzeigersinn.

(c) γ_2: ein Kreis mit Radius $R = \frac{1}{2}$ um $z = 2\mathrm{i}$, durchlaufen im Gegenuhrzeigersinn.

(d) γ_3: ein Kreis mit Radius $R = 2$ um $z = 2\mathrm{i}$, durchlaufen im Uhrzeigersinn.

(e) γ_4: die reelle Achse, durchlaufen in positiver Richtung.

[Kontrollergebnisse: (c) $I_{\gamma_2}(3) = -\frac{2\pi}{5}$, (d) $I_{\gamma_3}(\frac{10}{3}) = -\frac{3\pi}{16}$, (e) $I_{\gamma_4}(\frac{7}{2}) = \frac{2\pi}{11}$.]

[Gesamtpunktzahl Beispielaufgaben: 25]

Hausaufgabe 1: Cuachy-Riemann-Gleichungen [5]
Punkte: (a)[1](E); (b)[1](E); (c)[1](M); (d)[2](M).

Ermitteln Sie mittels der Cauchy-Riemann-Gleichungen, welche der folgenden Funktionen analytisch in $z = x + \mathrm{i}y$ sind, und wenn ja, auf welchem Gebiet in $\mathbb{C}$. Kontrollieren Sie jeweils ihre Schlussfolgerung, indem Sie jede Funktion durch z und $\bar{z}$ ausdrücken.

(a) $f(x,y) = (x^3 - 3xy^2) + \mathrm{i}(3x^2y - y^3)\,.$

(b) $\qquad f(x,y) = xy + \mathrm{i}\frac{1}{2}y^2\,.$

(c) $\qquad f(x,y) = \dfrac{x - \mathrm{i}y}{x^2+y^2}\,.$

(d) $\left.\begin{array}{l} f_+(x,y) \\ f_-(x,y) \end{array}\right\} = \mathrm{e}^x\big[x\cos y + \pm y\sin y\big] + \mathrm{i}\mathrm{e}^x\big[x\sin y \mp y\sin y\big]\,.$

Hausaufgabe 2: Satz von Cauchy [3]
Punkte: (a)[1](E); (b)[2](E). [T]

Berechnen Sie die komplexen Wegintegrale $I_{\gamma_i} = \int_{\gamma_i} \mathrm{d}z\,(z-\mathrm{i})^2$ entlang folgender Kurven γ_i, und erläutern Sie die Ergebnisse mit Verweis auf den Satz von Cauchy:

(a) γ_1 ist die Gerade von $z_0 = 0$ bis $z_1 = 1$, γ_2 die Gerade von $z_1 = 1$ bis $z_2 = \mathrm{i}$, und γ_3 die Gerade von $z_2 = \mathrm{i}$ bis $z_0 = 0$. Was ergibt $I_{\gamma_1} + I_{\gamma_2} + I_{\gamma_3}$? Erläutern Sie das Ergebnis.

(b) γ_4 ist der Viertelkreis mit Radius 1 von z_1 nach z_2. Gibt es einen Bezug zwischen I_{γ_4} und den Integralen aus (a)?

Hausaufgabe 3: Laurent-Reihe, Residuum [4]
Punkte: (a)[0.5](E); (b)[2](M); (c)[1](M); (d)[0.5](E). [T]

Bestimmen Sie für folgende Funktionen bezüglich jedes ihrer Pole zunächst das Residuum mittels der Residuum-Formel, dann die Laurent-Reihe mittels einer geeigneten Taylor-Entwicklung.

(a) $\dfrac{2z^3 - 3z^2}{(z-2)^3}$, $\qquad$ (b) $\dfrac{1}{(z-3)(z-2)}$, $\qquad$ (c) $\dfrac{\ln z}{(z-5)^2}$, $\qquad$ (d) $\dfrac{\mathrm{e}^{\pi z}}{(z-\mathrm{i})^m}$ mit $m \geq 1$.

Hinweis: Die Laurent-Reihe einer Funktion der Form $f(z) = g(z)/(z-z_0)^m$, mit $g(z)$ analytisch in einer Umgebung von z_0, folgt aus der Taylor-Reihe von $g(z)$ bezüglich z_0.
[Ergebniskontrolle: Der konstante Term [Koeffizient von $(z-z_0)^0$] in der Laurent-Reihe lautet jeweils: (a) 2, (b) $-\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{4}$ für die Pole bei $z_0 = 1$ bzw. 3, (c) $-\frac{1}{25}$, (d) $-\pi^m/m!$. Weiterer Check: Gleicht das Residuum dem Koeffizienten von $(z-z_0)^{-1}$ der jeweiligen Laurent-Reihe?]

Hausaufgabe 4: Residuensatz [3]

Betrachten Sie die Funktion $f(z) = \dfrac{4z}{(z-a)(z+1)^2}$, mit $1 < a \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Residuen der Funktion f an allen ihrer Polen.

Berechnen Sie die Integrale $I_{\gamma_i}(a) = \int_{\gamma_i} \mathrm{d}z\, f(z)$ für folgende Integrationswege:

(b) γ_1: ein Kreis mit Radius $R = 1$ um $z = a$, durchlaufen im Gegenuhrzeigersinn.

(c) γ_2: ein Kreis mit Radius $R = 1$ um $z = -1$, durchlaufen im Uhrzeigersinn.

(d) γ_3: ein Kreis mit Radius $R = 2a$ um den Ursprung, durchlaufen im Gegenuhrzeigersinn.

$\big[$Kontrollergebnisse: (b) $I_{\gamma_1}(2) = \frac{16}{9}\pi\mathrm{i}$, (c) $I_{\gamma_2}(3) = \frac{3}{2}\pi\mathrm{i}\big]$.

Hausaufgabe 5: Integration durch Schließung der Kontur und Residuensatz [5]
Punkte: (a)[2](M); (b)[3](A).

Berechnen Sie folgende Integrale (mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$) durch Schließung der Kontur entlang eines Halbkreises mit Radius $\to \infty$ in der oberen oder unteren komplexen Halbebene (zeigen Sie, dass beide Optionen dasselbe Ergebnis liefern!):

(a) $I(a,b) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{x}{(x^2+b^2)(x-\mathrm{i}a)}$, (b) $I(a,b) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{x}{(x+\mathrm{i}b)^2(x-\mathrm{i}a)}$.

[Kontrollergebnisse: (a) $I(3,-2) = \frac{\pi}{5}$, (b) $I(3,2) = \frac{6\pi}{25}$.]

Hausaufgabe 6: Residuensatz [4]

Betrachten Sie die Funktion

$$h(z) = \frac{z^2}{(z^2+4)(z^2+9)}.$$

Berechnen Sie jeweils die Integrale $\oint \mathrm{d}z\, h(z)$ für folgende gegen den Uhrzeigersinn verlaufende geschlossene Konturen:

(a) γ_1: ein Kreis mit Radius $R = \frac{1}{2}$ um $z = 2\mathrm{i}$.

(b) γ_2: ein Kreis mit Radius $R = 1$ um den Ursprung.

(c) γ_3: ein Kreis mit Radius $R = 2$ um $z = 2\mathrm{i}$.

(d) Berechnen Sie schließlich das Integral $I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, h(x)$, durch Schließung des Ingetrationswegs in der komplexen Ebene.

Hausaufgabe 7: Fourier-Rücktransformation mittels Konturintegral: Green'sche Funktion des gedämpften harmonischen Oszillators [6]
Punkte: (a)[3](A); (b)[3](A).

[ToDo: Punkteverteilung!] Die Green'sche Funktion des gedämpften harmonischen Oszillators ist durch die Differentialgleichung $(\mathrm{d}_t^2 + 2\mathrm{i}\gamma\mathrm{d}_t + \Omega^2)G(t) = \delta(t)$ definiert (mit $0 < \Omega, \gamma \in \mathbb{R}$). Ihre Fourier-Transformierte, definiert durch $G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tilde{\mathcal{G}}(\omega)$, lautet $\tilde{\mathcal{G}}(\omega) = (\Omega^2 - \omega^2 - 2\gamma\mathrm{i}\omega)^{-1}$. Schreiben Sie die Green'sche Funktion in die Form $G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z\, f(z)$, und berechnen Sie das Integral durch Schließung der Kontur in der komplexen Ebene. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Finden Sie die Residuen von $f(z)$. Unterscheiden Sie dabei folgende Fälle:
(i) $\Omega > \gamma$ (unterdämpft), (ii) $\Omega = \gamma$ (kritisch gedämpft) und (iii) $\Omega < \gamma$ (überdämpft).
Hinweis: Für (i) und (iii) gibt es jeweils zwei Pole von Ordnung eins, für (i) nur einen Pol, dafür aber von Ordnung zwei.

(b) Berechnen Sie $G(t)$ durch Schließung der Kontur entlang eines geeignet gewählten Halbkreises mit Radius $\to \infty$ (wieder mit Fallunterscheidung!).

Hausaufgabe 8: Residuensatz [5]

Betrachten Sie die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{[z^2 - 2az + a^2 + \frac{1}{4}]^2\,(4z^2 + 1)}$, mit $1 < a \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Residuen der Funktion f an allen ihrer Polen.

Berechnen Sie die Integrale $I_{\gamma_i}(a) = \int_{\gamma_i} \mathrm{d}z\, f(z)$ für folgende Integrationswege:

(b) γ_1: ein Kreis mit Radius $R = 1$ um $z_1 = 0$, durchlaufen im Gegenuhrzeigersinn.

(c) γ_2: ein Kreis mit Radius $R = \frac{1}{\sqrt{2}}a$ um $z_2 = \frac{1}{2}a(1 - \mathrm{i})$, durchlaufen im Uhrzeigersinn.

(d) γ_3: ein Kreis mit Radius $R = a + \frac{1}{2}$ um $z_3 = \frac{1}{2}a$, durchlaufen im Gegenuhrzeigersinn.

(e) γ_4: die Linie $z = x$, mit $x \in [-\infty, \infty]$, durchlaufen entlang der positiven x-Richtung.

(f) γ_5: die Linie $z = \frac{1}{3}a + \mathrm{i}y$, mit $y \in [-\infty, \infty]$, durchlaufen entlang der positiven y-Richtung.

[Kontrollergebnisse: (b) $I_{\gamma_1}(2) = \frac{\pi}{25}$, (c) $I_{\gamma_2}(2) = \frac{7\pi}{25}$, (e) $I_{\gamma_4}(3) = \frac{3\pi}{25}$, (f) $I_{\gamma_5}(3) = \frac{\pi}{150}$.]

[Gesamtpunktzahl Hausaufgaben: 35]
