Hauptklausur: Rechenmethoden

Datum: Donnerstag, 18.02.2016

Dauer: Bachelor Physik: 180 Minunten für 12 Aufgaben
Dauer: Nebenfach/Lehramt: 120 Minuten für beliebige 8 Aufgaben

Aufgabe 1: Integrale [5]
Punkte: (a)[1]; (b)[2,5]; (c)[1,5]

Berechnen Sie folgende Integrale

(a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}^2\mathbf{x}\,\delta(\mathbf{x}-a\mathbf{y})\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\,,$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{y} = (1,3)^T$.

(b) $\displaystyle\int_0^a \mathrm{d}x\,\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,,$ mit $0 < a \in \mathbb{R}$.

(c) $\displaystyle\int \mathrm{d}x\,\frac{1}{x^2+2x}\,.$

Aufgabe 2: Orthonormalbasis [5]
Punkte: (a)[5]; (b)[1](Bonus)

Gegeben sind drei Vektoren in $\mathbb{R}^4$: $\mathbf{v}_1 = (1,1,1,1)^T$, $\mathbf{v}_2 = (-1,4,4,-1)^T$, $\mathbf{v}_3 = (4,-2,2,0)^T$.

(a) Wenden Sie das Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren an, um aus $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ drei orthonormale Vektoren in $\mathbb{R}^4$ zu konstruieren, $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ und $\mathbf{e}'_3$, mit $\mathbf{e}'_1 \parallel \mathbf{v}_1$.

(b) (Bonus) Wie sieht die Darstellung des Vektors $\mathbf{a} = 3\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$ als Linearkombination der in (a) erhaltenen orthonormalen Vektoren aus?

Aufgabe 3: Nabla-Identitäten [5]
Punkte: (a)[3]; (b)[2];

(a) Sei $f(x,y,z)$ ein beliebiges stetig differenzierbares Skalarfeld und $\mathbf{A}(x,y,z)$ ein beliebiges zweifach stetig differenzierbares Vektorfeld. Beweisen Sie folgende Identitäten (mittels Indexnotation, d.h. ohne $\mathbf{A}$ und $\boldsymbol{\nabla}$ explizit als Spaltenvektoren darzustellen):

(i) $\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\mathbf{A}) = f\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}) + \mathbf{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}f)$.

(ii) $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}) - \boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A}\,,$ wobei $\boldsymbol{\nabla}^2 = (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})$.

(b) Überprüfen Sie die Identitäten aus (a) nun *explizit* für die Felder

$$f(\mathbf{r}) = x \quad \text{und} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = (0, y\mathrm{e}^z, x)^T\,, \quad \text{mit} \quad \mathbf{r} = (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3\,,$$

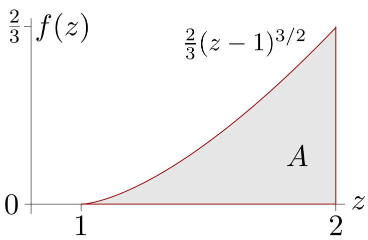
indem Sie die einzelnen Terme der Identitäten *explizit* berechnen.

Aufgabe 4: Volumen- und Linienintegral [5]
Punkte: (a)[2]; (b)[3]; (c)(Bonus)[1]

(a) Die Funktion f sei gegeben durch $f : [1,2] \to \mathbb{R}, z \mapsto \frac{2}{3}(z-1)^{3/2}$.

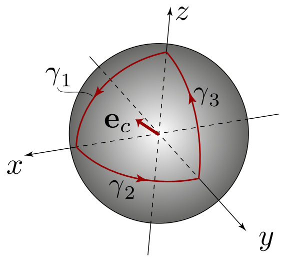
  (i) Berechnen Sie die Länge des Kurvenstücks zwischen den Punkten $(1,0)$ und $(2, \frac{2}{3})$.

  (ii) Der Graph der Funktion f und die z-Achse schließen die Fläche A ein. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der sich beim Rotieren der Fläche A um die z-Achse ergibt.



(b) (i) Finden Sie eine Parametrisierung des Wegs γ_1, der entlang des Großkreises der Einheitskugel vom Punkt $(0,0,1)^T$ zum Punkt $(1,0,0)^T$ läuft.

  (ii) Bestimmen Sie das Linienintegral $I[\gamma_1] = \int_{\gamma_1} \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})$ des Vektorfelds $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_c \times \mathbf{r}$ entlang des Weges γ_1, wobei $\mathbf{e}_c = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$.



(c) (Bonus) γ_2 und γ_3 seien die Wege entlang der Großkreise vom Punkt $(1,0,0)^T$ zum Punkt $(0,1,0)^T$, bzw. vom Punkt $(0,1,0)^T$ zum Punkt $(0,0,1)^T$. Welcher Wert ergibt sich für das Linienintegral $I[\gamma] = \int_\gamma \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})$ entlang des geschlossenen Weges $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$?

Aufgabe 5: Lineare Abbildung und Basistransformation in $\mathbb{R}^3$ [5]
Punkte: (a)[1]; (b)[0.5]; (c)[1]; (d)[1.5]; (e)[1]

Gegeben sei folgende Basis des $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$.

(a) Wie lautet die Matrixdarstellung $(t^i{}_j)$ der Transformation T von Basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ zu der Standardbasis, definiert durch $\mathbf{v}_j = \mathbf{e}_i\, t^i{}_j$? Bestimmen Sie auch die Matrixdarstellung der inversen Transformation, T^{-1}.

(b) Wie lauten die Komponenten $\tilde{x}^i$ des Vektors $\mathbf{x} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ bezüglich der Basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, definiert durch $\mathbf{x} = \tilde{x}^i \mathbf{v}_i$?

(c) R sei eine Rotation um $\pi/4$ im mathematisch positiven Drehsinn um die $\mathbf{e}_2$-Achse. Wie lautet ihre Matrixdarstellung $(r^i{}_j)$ bezüglich der Standardbasis, definiert durch $\mathbf{e}_j \overset{R}{\mapsto} \mathbf{e}_i\, r^i{}_j$?

(d) Wie lautet die Matrixdarstellung $(\tilde{r}^i{}_j)$ dieser Rotation bezüglich der Basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, definiert durch $\mathbf{v}_j \overset{R}{\mapsto} \mathbf{v}_i\, \tilde{r}^i{}_j$?

(e) $\mathbf{x}'$ sei das Bild von $\mathbf{x}$ unter dieser Rotation, $\mathbf{x} \overset{R}{\mapsto} \mathbf{x}'$. Wie lauten dessen Komponenten $\tilde{x}'^j$ in der Basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, definiert durch $\mathbf{x}' = \tilde{x}'^j \mathbf{v}_j$?

Aufgabe 6: Eigenwertproblem, mehr-dimensionales Gauß-Integral [5]
Punkte: (a)[3]; (b)[2];

Gegeben Sei die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A und geben Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren der Matrix A an.

(b) Berechnen Sie das dreidimensionale Gaußintegral $I = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\, \mathrm{e}^{-6x^2-3y^2-2z^2+4xy}$.
(Sie brauchen hierzu keine Erklärungen und Zwischenschritte angeben.)

Aufgabe 7: Reihenentwicklung [5]
Punkte: (a)[1]; (b)[4]

Sei $y(x)$ eine reelle und analytische Funktion von x, die für $|x-2| \ll 1$ folgende Gleichung erfüllt:

$$2\mathrm{e}^{2-y} - \frac{4}{y} = (2-x)y\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $y(2) = 2$ die Gleichung erfüllt.

(b) Finden Sie anschließend die entsprechende Lösung $y(x)$ der Gleichung iterativ, mittels einer Reihenentwicklung um den Punkt $x = 2$ bis einschließlich $\mathcal{O}((x-2)^2)$.

Aufgabe 8: Inhomogene lineare Differentialgleichung [5]
Punkte: (a)[2]; (b)[2]; (c)[1]

Die Funktion $x(t)$ erfülle die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$\dot{x} - \frac{2}{t}x = t^2 e^{-t}.$$

(a) Finden Sie die allgemeine Lösung $x_h(t)$ der entsprechenden homogenen Gleichung.

(b) Finden Sie eine partikuläre Lösung $x_p(t)$ der inhomogenen Gleichung durch Variation der Konstanten.

(c) Finden Sie die Lösung $x(t)$ der inhomogenen Gleichung unter der Anfangsbedingung $x(1) = 0$.

Aufgabe 9: Fourier-Reihen [5]
Punkte: (a)[1]; (b)[4]

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}\left(\sin x + |\sin x|\right)$.
Finden Sie ihre Fourier-Reihe in der Darstellung $f(x) = \frac{1}{L}\sum_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n x}\tilde{f}_n$.

(a) Wie sind k_n und L zu wählen?

(b) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe, d. h. berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten $\tilde{f}_n$.
Hinweis: Falls das Ergebnis für $\tilde{f}_n$ einen Nenner enthält, der für gewisse n-Werte gleich Null werden kann, müssen die entsprechenden Fourier-Koeffizienten separat berechnet werden!

Aufgabe 10: Stabilitätsanalyse in drei Dimensionen [5]
Punkte: (a)[2]; (b)[3]

Die Funktion $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \mathbf{x}(t)$, erfülle folgende Differentialgleichung:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(x+1) + 2(x+1)^2 + 3z^2 + 2z \\ 2(1-y+(1-y)^2) \\ -2(x+1) - 2z \end{pmatrix} =: \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

(a) Finden Sie die Fixpunkte dieser Differentialgleichung.

(b) Betrachten Sie nun den Fixpunkt $\mathbf{x}^* = (-1, 1, 0)^T$. Bestimmen Sie die *Anzahl* seiner stabilen und instabilen Richtungen (die Richtungen selbst brauchen nicht bestimmt zu werden), sowie die Zeitskalen, auf denen entsprechende Auslenkungen zerfallen bzw. wachsen.

Aufgabe 11: Green'sche Funktion [5]
Punkte: (a)[1]; (b)[2]; (c)[1]; (d)[1]; (e)[1](Bonus)

Die Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto x(t)$, erfülle folgende lineare Differentialgleichung:

$$D(\mathrm{d}_t)x(t) = f(t), \quad \text{mit} \quad D(\mathrm{d}_t) = (\mathrm{d}_t + m)\,, \quad 0 < m \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

(a) Finden Sie die allgemeine Lösung $x_h(t)$ der homogenen Differentialgleichung (1) (mit $f = 0$).

(b) Bestimmen Sie die Green'sche Funktion $G(t)$, definiert durch $D(d_t)G(t) = \delta(t)$.
Hinweis: Für eine geeignete Wahl der Anfangsbedingungen gilt: $G(t) = \theta(t)x_h(t)$.

(c) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $\tilde{\mathcal{G}}(\omega)$ der Green'schen Funktion.

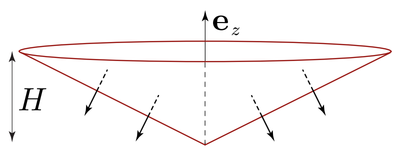
(d) Finden Sie mittels der Green'schen Funktion eine partikuläre Lösung $x_p(t)$ der Differentialgleichung mit Antrieb $f(t) = \sin t$. Wie lautet die allgemeine Lösung zu diesem Antrieb?

(e) (Bonus) Sei $x(t)$ die Lösung der Differentialgleichung (1) mit dem Antrieb $f(t) = \sin t$ und der Anfangsbedingung $x(0) = \frac{-1}{m^2+1}$. Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $\tilde{x}(\omega)$ dieser Lösung $x(t)$.

Aufgabe 12: Satz von Stokes in Zylinderkoordinaten – Kegelstumpf [5]
Punkte: (a)[1]; (b)[2]; (c)[2]

(a) Berechnen Sie die Rotation $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v}$ des Vektorfelds $\mathbf{v} = \rho^2 z\, \mathbf{e}_\phi + \rho\, \mathbf{e}_z$ in Zylinderkoordinaten.
Hinweis: $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v} = \mathbf{e}_\rho \Big[\frac{1}{\rho}\partial_\phi v_z - \partial_z v_\phi\Big] + \mathbf{e}_\phi \Big[\partial_z v_\rho - \partial_\rho v_z\Big] + \mathbf{e}_z \frac{1}{\rho}\Big[\partial_\rho(\rho v_\phi) - \partial_\phi v_\rho\Big]\,.$

$K = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq z \leq H, \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2z\}$ sei ein auf der z-Achse zentrierten Kegel. Berechnen Sie den von innen/oben nach außen/unten (siehe Pfeile in Skizze) gerichteten Fluss $\Phi_M = \int_M \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v})$ durch den Mantel M (die schrägstehende Fläche) des Kegels auf zwei verschiedene Weisen:



(b) Direkt, mittels Zylinderkoordinaten.

(c) Drücken Sie Φ_M mittels dem Satz von Stokes durch ein Linienintegral von $\mathbf{v}$ über den Rand ∂M des Mantels aus, und berechnen Sie letzteres.

[Gesamtpunktzahl Aufgaben: 60]