Nachklausur: Rechenmethoden

Lösung Aufgabe 1: Integrale [5]

(a) $\int \mathrm{d}x\, x^2 \log x \overset{\text{p.I.}}{=} \frac{1}{3}x^3 \log x - \int \mathrm{d}x\, \frac{1}{3}x^3\, \frac{1}{x} = \boxed{\tfrac{1}{3}x^3 \log x - \tfrac{1}{9}x^3 + \text{const.}}\,.$

(b) Mit der Substitution $x = \cosh y$ ($\mathrm{d}x = \sinh y\, \mathrm{d}y$)

$$\int_2^3 \mathrm{d}x \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \int_{\mathrm{arcosh}(2)}^{\mathrm{arcosh}(3)} \mathrm{d}y \frac{\sinh y}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} = \int_{\mathrm{arcosh}(2)}^{\mathrm{arcosh}(3)} \mathrm{d}y \frac{\sinh y}{|\sinh y|}$$
$$= \boxed{\mathrm{arcosh}(3) - \mathrm{arcosh}(2)}\,.$$

(c) Zu berechnen:
$$I = \int_1^2 \mathrm{d}x\, \frac{5x+7}{x^2+3x+2} = \int_1^2 \mathrm{d}x\, \frac{5x+7}{(x+1)(x+2)}$$

Ansatz:
$$\frac{5x+7}{x^2+3x+2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} = \frac{(a+b)x + 2a + b}{(x+1)(x+2)}$$

Koeffizientenvergleich:
$$a + b = 5\,, \quad 2a + b = 7\,, \quad \Rightarrow \quad a = 2\,, b = 3\,.$$

Integral:
$$I = \int_1^2 \mathrm{d}x\, \frac{2}{x+1} + \int_1^2 \mathrm{d}x\, \frac{3}{x+2}$$
$$= 2\big[\log(3) - \log(2)\big] + 3\big[\log(4) - \log(3)\big]$$
$$= -\log(3) + 4\log(2) = \boxed{\log\left(\tfrac{16}{3}\right)}\,.$$

Lösung Aufgabe 2: Basisvektoren [5]

(a)
$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \cos^{-1}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{\tfrac{\pi}{6}}\,.$$

(b) Falls die drei Vektoren linear abhängig sind, ist die Determinante der Matrix $V = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ gleich null.

$$\det(V) = \left| \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right| = -4 + 1 - a + 2 = -1 - a \overset{!}{=} 0\,.$$
$$\Rightarrow \quad a = \boxed{-1}.$$

(c) Die Vektoren $\mathbf{v}_i$ bilden keine Orthonormalbasis. Folglich muss das Gleichungssystem $\mathbf{v_1}x^1 + \mathbf{v_2}x^2 + \mathbf{v_3}x^3 = \mathbf{x}$ gelöst werden, um die Komponenten x^i zu bestimmen.

Gleichungssystem:
$$2x^1 + x^2 + x^3 = 0 \tag{1}$$
$$x^1 + x^2 + x^3 = 2 \tag{2}$$
$$x^1 + 0x^2 - 2x^3 = 1 \tag{3}$$

(3):
$$x^1 = \boxed{1 + 2x^3} \tag{4}$$

Eingesetzt in (2):
$$1 + x^2 + 3x^3 = 2$$
$$\Rightarrow \quad x^2 = \boxed{1 - 3x^3} \tag{5}$$

Eingesetzt in (1):
$$3 + 2x^3 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x^3 = \boxed{-\tfrac{3}{2}}, x^1 \overset{(4)}{=} \boxed{-2}, x^3 \overset{(5)}{=} \boxed{\tfrac{11}{2}}$$

Lösung Aufgabe 3: Gradient und Rotation [5]

(a) $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \partial_i (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \partial_i \epsilon_{ijk} A_j B_k = \epsilon_{ijk} B_k \partial_i A_j + \epsilon_{ijk} A_j \partial_i B_k$
$= B_k \epsilon_{kij} \partial_i A_j - A_j \epsilon_{jik} \partial_i B_k = B_k (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})_k - A_j (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B})_j = \mathbf{B} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B})$

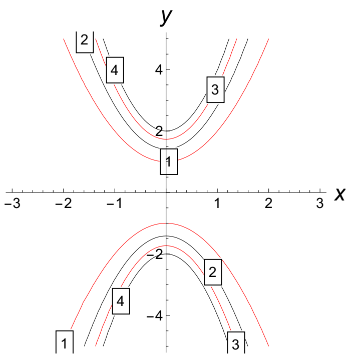
(b) (i) $\boldsymbol{\nabla} h(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{4xy^2}{(x^2+1)^3} \\ \frac{2y}{(x^2+1)^2} \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow y = 0$ und x beliebig.

D.h. das Höhenprofil ist auf der Geraden $\boxed{y = 0}$ lokal flach.

(ii) $\boldsymbol{\nabla} h|_{(0,-1)} = (0, -2)^T$. Die Richtung des stärksten Anstiegs ist also gegen durch $\boxed{\mathbf{n} = (0, -1)^T}$. Die Konturlinie läuft senkrecht dazu, also in Richtung $\boxed{\mathbf{n}_\perp = (1, 0)^T}$ auf der Höhe $\boxed{h(0, -1) = 1}$.

(iii) $H = \dfrac{y^2}{(x^2 + 1)^2}$

$\Rightarrow \boxed{y(x) = \pm\sqrt{H}(x^2 + 1)}$



Lösung Aufgabe 4: Linienintegral [5]

(a) In Polarkoordinaten gilt:

$$x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi, \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \mathbf{e}_\rho = \begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix}-\sin\phi\\ \cos\phi\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix}-y\\ x\end{pmatrix} - \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \mathbf{e}_\phi - \frac{1}{\rho}\mathbf{e}_\rho.$$

Also gilt $\boxed{F_\rho = -1/\rho}$ und $\boxed{F_\phi = 1}$.

(b) Entlang der Kurve: $\mathbf{r} = \rho\,\mathbf{e}_\rho$, mit $\rho(t) = t$ und $\phi(t) = t\,.$

Geschwindigkeit: $\dot{\mathbf{r}} = \dot\rho\,\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\mathbf{e}}_\rho = \mathbf{e}_\rho + t\,\mathbf{e}_\phi\,.$

$$\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \Big(\mathbf{e}_\rho + t\,\mathbf{e}_\phi\Big)\cdot\Big(\mathbf{e}_\phi - \tfrac{1}{t}\mathbf{e}_\rho\Big) = t - \frac{1}{t}$$

Linienintegral:

$$I[\gamma_S] = \int_{\gamma_S}\mathrm{d}\mathbf{r}\cdot F = \int_1^a \mathrm{d}t\,\dot{\mathbf{r}}(t)\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \int_1^a \mathrm{d}t\Big(t - \frac{1}{t}\Big)$$

$$= \Big[\tfrac{1}{2}t^2 - \ln t\Big]_1^a = \boxed{\tfrac{1}{2}(a^2-1) - \ln a}\,.$$

(c) Aus der Rechnung in (b) ist ersichtlich, dass sich in diesem Fall das Kurvenintegral zu

$$I[\gamma_S] = \int_\gamma \mathrm{d}\mathbf{r}\,\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{F} = \int_1^a \mathrm{d}t\,(t - t\,g(t^2))$$

ergibt. Damit das Integral für alle Werte von a verschwindet muss der Integrand identisch Null sein, d.h. $g(t^2) = 1 \;\Rightarrow\; \boxed{g(t) = 1}$ für alle $t \in [1,\infty)$. Für $t < 1$ kann $g(t)$ beliebig gewählt werden.

Lösung Aufgabe 5: Lineare Abbildungen [5]

(a) Die darstellende Matrix der Rotation A ist gegeben durch:

$$\begin{array}{rcl}\mathbf{e}_x & \overset{A}{\mapsto} & -\mathbf{e}_z\\ \mathbf{e}_y & \overset{A}{\mapsto} & \mathbf{e}_y\\ \mathbf{e}_z & \overset{A}{\mapsto} & \mathbf{e}_x\end{array} \quad\Rightarrow\quad A = \boxed{\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}}.$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -2\end{pmatrix}}.$$

(b) Die folgenden Zusammenhänge sieht man einfach:

$$\mathbf{e}_1 = \boxed{\frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3)} \qquad \Rightarrow \tilde{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{v}}_1 + \tilde{\mathbf{v}}_3) = \boxed{(1, 0, 1/2)^T}$$

$$\mathbf{e}_2 = \boxed{-\mathbf{v}_2} \qquad \Rightarrow \tilde{\mathbf{e}}_2 = -\,\tilde{\mathbf{v}}_2 = \boxed{(0, -3, 2)^T}$$

$$\mathbf{e}_3 = \boxed{\frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3)} \qquad \Rightarrow \tilde{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{v}}_1 - \tilde{\mathbf{v}}_3) = \boxed{(1,1,3/2)^T}$$

also folgt

$$C = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}}.$$

Lösung Aufgabe 6: Matrixdiagonalisierung [5]

Eigenwerte: $0 \stackrel{!}{=} \det(A - \lambda\mathbb{1}) = (\lambda-1)\big[(\lambda-2)(\lambda-1)-1\big] + \mathrm{i}^2(\lambda-1)$

$$= (\lambda-1)\underbrace{\big[(\lambda-2)(\lambda-1)-2\big]}_{\lambda(\lambda-3)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 3}.$$

Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = 0\text{: } (A - \lambda_1\mathbb{1})\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & 0 \\ -\mathrm{i} & 2 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}\mathbf{v}_1 \Rightarrow \boxed{\mathbf{v}_1 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}},$$

$$\lambda_2 = 1\text{: } (A - \lambda_2\mathbb{1})\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} & 0 \\ -\mathrm{i} & 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\mathbf{v}_2 \Rightarrow \boxed{\mathbf{v}_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}},$$

$$\lambda_3 = 0\text{: } (A - \lambda_3\mathbb{1})\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 & \mathrm{i} & 0 \\ -\mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & -2 \end{pmatrix}\mathbf{v}_3 \Rightarrow \boxed{\mathbf{v}_3 = \tfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

Für $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2\mathrm{i}}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}}$ gilt $D = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Da S unitär ist, gilt $S^{-1} = S^\dagger = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2\mathrm{i}}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}}$.

Lösung Aufgabe 7: Taylor-Entwicklung in zwei Dimensionen [5]

Die zwei-dimensionale Taylor-Entwicklung von $f(x,y)$ um $x = 0$ und $y = 1$ lautet:

$$f(x,y) = \Big[1 + x\partial_x + (y-1)\partial_y + \tfrac{1}{2!}\partial_x^2 + \tfrac{1}{2!}(y-1)^2\partial_y^2 + x(y-1)\partial_x\partial y\Big] f(x,y)\Big|_{x=0,y=1}.$$

Alternativ: die Taylor-Reihen der beiden Faktoren multiplizieren,

$$f(x,y) = \Big[1 + x\partial_x + + \tfrac{1}{2!}\partial_x^2\Big]\frac{1}{(1+3x)}\Big|_{x=0} \times \Big[1 + \tfrac{1}{2!}(y-1)^2\partial_y^2](1 - \ln y)\Big|_{y=1},$$

und nur Terme bis zur zweiten Ordnung behalten.

Berechnung der Taylor-Koeffizienten:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{1-\ln y}{1+3x}\,, & &\Rightarrow & f(0,1) &= \boxed{1}\,.\\
\partial_x f(x,y) &= -3\frac{1-\ln y}{(1+3x)^2}\,, & &\Rightarrow & \partial_x f(0,1) &= \boxed{-3}\,.\\
\partial_x^2 f(x,y) &= 2\cdot 3^2\frac{1-\ln y}{(1+3x)^3}\,, & &\Rightarrow & \partial_x^2 f(0,1) &= \boxed{18}\,.\\
\partial_y f(x,y) &= -\frac{1}{(1+3x)\,y}\,, & &\Rightarrow & \partial_y f(0,1) &= \boxed{-1}\,.\\
\partial_y^2 f(x,y) &= \frac{1}{(1+3x)\,y^2}\,, & &\Rightarrow & \partial_y^2 f(0,1) &= \boxed{1}\,.\\
\partial_x\partial_y f(x,y) &= \frac{3}{(1+3x)^2\,y}\,, & &\Rightarrow & \partial_x\partial_y f(0,1) &= \boxed{3}\,.
\end{aligned}
$$

$$
f(x,y) = \boxed{1-3x-(y-1)+9x^2+\tfrac{1}{2}(y-1)^2+3x(y-1)+\mathcal{O}\big(x^3,(y-1)^3,\ldots\big)}
$$

Lösung Aufgabe 8: Gewöhnliche Differentialgleichung [5]

(a)
$$
\begin{aligned}
\dot u =& 2x\dot x + mt^{m-1} = 2x\frac{1}{2xt^2}\left[(x^2+t^2)^2-2t^3\right]+mt^{m-1}\\
=& \frac{1}{t^2}\left[(x^2+t^2)^2-2t^3\right]+mt^{m-1}\\
=& \boxed{\frac{1}{t^2}\left[\left(u-t^m+t^2\right)^2-2t^3\right]+mt^{m-1}}\,.
\end{aligned}
$$

Für die Wahl $m=2$, also $u=x^2+t^2$, wird die Differentialgleichung separabel und wir erhalten:

$$
\dot u = \frac{u^2}{t^2} \tag{6}
$$

(b) Separation der Variablen in Gleichung (6):
$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{d}\tilde u \frac{1}{\tilde u^2} =& \int \mathrm{d}\tilde t \frac{1}{\tilde t^2}\\
\Rightarrow \frac{1}{u} =& \frac{1}{t}+C\\
\Rightarrow u =& \frac{t}{1+Ct}.
\end{aligned}
$$

Rücksubstitution:
$$
x = \pm\sqrt{u-t^2} = \pm\sqrt{\frac{t}{1+tC}-t^2}.
$$

Anfangsbedingungen legen das "+" Vorzeichen fest:
$$
\begin{aligned}
1 =& \sqrt{\frac{2}{1+2C}-4}\\
\Rightarrow C =& -\tfrac{3}{10}.
\end{aligned}
$$

Die Lösung lautet also insgesamt:
$$
x = \boxed{\sqrt{\frac{t}{1-\frac{3}{10}t}-t^2}}\,.
$$

Anmerkung: Um zu überprüfen, dass die Lösung wirklich auf dem ganzen angegebenen Intervall definiert ist, muss man noch zeigen, dass für alle $t \in [2, \frac{10}{3}]$ gilt, dass $\frac{t}{1-\frac{3}{10}t} - t^2 \geq 0$ ist. Dies wird hier aber nicht verlangt.

Lösung Aufgabe 9: Fourier-Reihen [5]

(a) Wir bemerken, dass g eine Periodenlänge von π hat. Wir wählen also: $L = \pi$, $k_n = \frac{2\pi n}{L} = 2n$.

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_n &= \int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_n x} g(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-2n\mathrm{i}x} ax \\
&= \begin{cases} n = 0: \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}x ax \\ n \neq 0: \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-2n\mathrm{i}x} ax \overset{\text{P.I.}}{=} \frac{ax}{-2n\mathrm{i}} \mathrm{e}^{-2n\mathrm{i}x} \big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}x \frac{a}{-2n\mathrm{i}} \mathrm{e}^{-2n\mathrm{i}x} \end{cases} \\
&= \begin{cases} n = 0: \boxed{0}, \\ n \neq 0: \frac{a}{-2n\mathrm{i}} \left(\frac{\pi}{2}(-1)^n + \frac{\pi}{2}(-1)^n \right) - 0 = \boxed{\dfrac{a\pi(-1)^n}{-2n\mathrm{i}}}. \end{cases}
\end{aligned} \tag{7}$$

(b) Laut Faltungstheorem gilt: $\widetilde{(g * g)}_n = \tilde{g}_n \cdot \tilde{g}_n$. Somit

$$\widetilde{(g * g)}_n = \begin{cases} n = 0: 0^2 = \boxed{0}, \\ n \neq 0: \left(\frac{a\pi(-1)^n}{-2n\mathrm{i}} \right)^2 = \boxed{-\dfrac{a^2\pi^2}{4n^2}}. \end{cases} \tag{8}$$

Lösung Aufgabe 10: Gekoppelte Schwingungen von zwei Massenpunkten [5]

(a) Bewegungsgleichungen:

in Matrixform:
$$\begin{pmatrix} \ddot{x}^1 \\ \ddot{x}^2 \end{pmatrix} = -\underbrace{\frac{1}{m} \begin{pmatrix} 9k + k' & -k' \\ -k' & k + k' \end{pmatrix}}_{\equiv A} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix},$$

Kompaktnotation:
$$\ddot{\mathbf{x}} = -A\mathbf{x}. \tag{9}$$

Das gegebene Gleichungssystem erhalten wir durch die Wahl $\boxed{k' = 3k}$.

(b) Überführung in ein Eigenwertproblem:

Ansatz für Lösung:
$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}\cos(\omega t). \tag{10}$$
Ansatz 2 mal ableiten:
$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = -\omega^2 \mathbf{v}\cos(\omega t). \tag{11}$$
(10), (11) in (9) einsetzen:
$$-\omega^2 \mathbf{v}\cos(\omega t) = -A\mathbf{v}\cos(\omega t),$$
Eigenwertgleichung:
$$A\mathbf{v} = \omega^2 \mathbf{v}. \tag{12}$$

(c)

Eigenwertgleichung (12), mit $k/m = 1$: $\quad A\mathbf{v} \overset{(12)}{=} \omega^2 \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$, mit $\lambda \equiv \omega^2$. (13)

Bestimmung der Eigenwerte λ_j der Matrix A:

Charakteristisches Polynom: $$0 \overset{!}{=} \det \begin{pmatrix} 12-\lambda & -3 \\ -3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (12-\lambda)(4-\lambda) - 9$$
$$= \lambda^2 - 16\lambda + 39 = (\lambda - 13)(\lambda - 3) \, .$$

Eigenwerte: $\quad \lambda_1 = \boxed{3}$, $\quad \lambda_2 = \boxed{13}$. (14)

Eigenfrequenzen $\omega_j \overset{(13)}{=} \sqrt{\lambda_j}$: $\quad \omega_1 \overset{(14)}{=} \boxed{\sqrt{3}}$, $\quad \omega_2 \overset{(14)}{=} \boxed{\sqrt{13}}$. (15)

(16)

(d)

Eigenvektoren $\mathbf{v}_j$: $\quad (A - \lambda_j \mathbb{1})\, \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$.

$\lambda_1 = 3$: $\quad \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}$. (17)

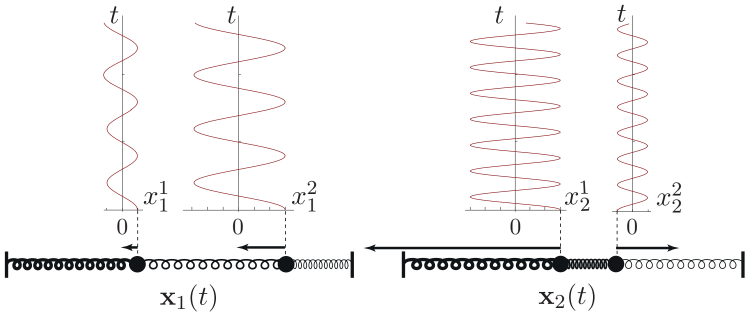
$\lambda_2 = 13$: $\quad \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}}$. (18)

Gleichphasige Eigenmode: $\quad \mathbf{x}_1(t) \overset{(10)}{=} \mathbf{v}_1 \cos(\omega_1 t) \overset{(17)}{=} \boxed{\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{3}\, t)}$.

Gegenphasige Eigenmode: $\quad \mathbf{x}_2(t) \overset{(10)}{=} \mathbf{v}_2 \cos(\omega_2 t) \overset{(18)}{=} \boxed{\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{13}\, t)}$.

Für die Eigenmode $\mathbf{x}_1(t)$ (linke Skizzen) schwingen die beiden Massen in Phase, für $\mathbf{x}_2(t)$ (rechte Skizzen) schwingen sie gegenphasig. Letzteres erfordert stärkere Streckungen und Stauchungen der Federn, deswegen kostet die gegenphasige Mode mehr Energie und hat somit eine höhere Frequenz als die gleichphasige Mode. Die schematischen Skizzen unten deuten die Positionen der Massenpunkte zum Zeitpunkt $t = 0$ an, die fetten Pfeile ihre Geschwindigkeiten kurze Zeit (z.B. eine halbe Periode) später.

Anmerkung: werden die beiden Massen zum Zeitpunkt $t = 0$ um x^1_0 bzw. x^2_0 ausgelenkt, ist die nachfolgende Schwingung eine Überlagerung der beiden Eigenmoden, $\mathbf{x}(t) = \sum_j c^j \mathbf{x}_j(t)$, deren Koeffizienten c^j durch die Anfangsauslenkung $\mathbf{x}_0 = (x^1_0, x^2_0)^T$ festgelegt sind, mit $\mathbf{x}_0 = \sum_j c^j \mathbf{v}_j$.



Lösung Aufgabe 11: Green'sche Funktion für unterdämpften harmonischen Oszillator [5]

(a) Die gesuchte Lösung ergibt sich aus der Faltung der Green'schen Funktion mit der Antriebsfunktion:

$$\begin{aligned}
x_p(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t'\, \mathcal{G}(t-t') f(t') \qquad (19)\\
&= \frac{1}{\Omega_r} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t'\, \theta(t-t') \sin[(\Omega_r(t-t')]\, \mathrm{e}^{-\gamma(t-t')}\, \theta(t')\mathrm{e}^{-\gamma t'}\\
&= \frac{1}{\Omega_r} \mathrm{e}^{-\gamma t}\theta(t) \int_0^t \mathrm{d}t'\, \sin[\Omega_r(t-t')],
\end{aligned}$$

[Die Integrationsgrenzen wurden mittels der beiden θ-Funktionen eingeschränkt. Da für $t<0$ immer mindestens eine der beiden θ-Funktionen null ist, erhalten wir den $\theta(t)$-Term.]

$$x_p(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\theta(t)\, \frac{1}{\Omega_r^2} \cos[\Omega_r(t-t')]\bigg|_0^t = \boxed{\mathrm{e}^{-\gamma t}\theta(t)\frac{1}{\Omega_r^2}\Big[1-\cos(\Omega_r t)\Big]}.$$

(b) Einfache Lösungstrategie: $\tilde{\mathcal{G}}(\omega)$ lässt sich durch Fourier-Transformation der definierenden Differentialgleichung für $\mathcal{G}(t)$ (also mit δ-Funktion als Antrieb) bestimmen:

Definierende Differentialgleichung: $\ddot{\mathcal{G}}(t) + 2\gamma\dot{\mathcal{G}}(t) + \Omega^2\mathcal{G}(t) = \delta(t)\,.$

Fourier-Darstellung: $\Big[-\omega^2 - 2\mathrm{i}\omega\gamma + \Omega^2\Big]\tilde{\mathcal{G}}(\omega) = 1\,.$

Aufgelöst nach $\tilde{\mathcal{G}}(\omega)$: $$\tilde{\mathcal{G}}(\omega) = \boxed{\frac{1}{\Omega^2-\omega^2-2\mathrm{i}\omega\gamma}}. \qquad (20)$$

Umständliche Lösungstrategie: direkte Berechung der Fourier-Transformation von $\mathcal{G}(t)$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{G}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathcal{G}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\theta(t)\frac{\sin(\Omega_r t)}{\Omega_r}\mathrm{e}^{-\gamma t}\\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}\Omega_r}\int_0^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega_r t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega_r t}\right)\mathrm{e}^{-\gamma t}\\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}\Omega_r}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t-\gamma t+\mathrm{i}\Omega_r t}}{\mathrm{i}\omega-\gamma+\mathrm{i}\Omega_r} - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t-\gamma t-\mathrm{i}\Omega_r t}}{\mathrm{i}\omega-\gamma-\mathrm{i}\Omega_r}\right]_{t=0}^{\infty}\\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}\Omega_r}\left[\frac{-1}{\mathrm{i}\omega-\gamma+\mathrm{i}\Omega_r} - \frac{-1}{\mathrm{i}\omega-\gamma-\mathrm{i}\Omega_r}\right]\\
&= \frac{1}{(\mathrm{i}\omega-\gamma)^2+\Omega_r^2} \overset{\Omega_r^2=\Omega^2-\gamma^2}{=} (20)\,\checkmark
\end{aligned}$$

(c) Einfache Lösungstrategie: $\tilde{x}_p(\omega)$ lässt sich mittels der Fourier-Transformierten des Faltungsansatzes (19), nämlich $\tilde{x}_p(\omega) = \tilde{\mathcal{G}}(\omega)\tilde{f}(\omega)$, bestimmen. Hierfür benötigen wir die Fouriertransformierte von $f(t) = \theta(t)\mathrm{e}^{-\gamma t}$:

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} f(t) = \int_0^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t-\gamma t} = \frac{-1}{\mathrm{i}\omega-\gamma}.$$

Folglich: $$\tilde{x}_p(\omega) = \tilde{\mathcal{G}}(\omega)\tilde{f}(\omega) = \boxed{\frac{1}{(\Omega^2 - \omega^2 - 2\mathrm{i}\gamma\omega)(\gamma - \mathrm{i}\omega)}}\,. \tag{21}$$

Umständliche Lösungstrategie: direkte Berechung der Fourier-Transformation von $x_p(t)$:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_p(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} x_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{-\gamma t}\theta(t)\frac{1}{\Omega_r^2}\Big[1 - \cos(\Omega_r t)\Big] \\
&= \frac{1}{\Omega_r^2}\int_0^{\infty} \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t - \gamma t}\Big[1 - \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega_r t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega_r t}\right)\Big] \\
&= \frac{1}{\Omega_r^2}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t - \gamma t}}{\mathrm{i}\omega - \gamma} - \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t - \gamma t + \mathrm{i}\Omega_r t}}{\mathrm{i}\omega - \gamma + \mathrm{i}\Omega_r} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t - \gamma t - \mathrm{i}\Omega_r t}}{\mathrm{i}\omega - \gamma - \mathrm{i}\Omega_r}\right)\right]_{t=0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{\Omega_r^2}\left[\frac{-1}{\mathrm{i}\omega - \gamma} + \frac{\mathrm{i}\omega - \gamma}{(\mathrm{i}\omega - \gamma)^2 + \Omega_r^2}\right] \\
&= \frac{-1}{(\mathrm{i}\omega - \gamma)\left((\mathrm{i}\omega - \gamma)^2 + \Omega_r^2\right)} \overset{\Omega_r^2 = \Omega^2 - \gamma^2}{=} (21) \checkmark
\end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 12: Satz von Gauß– Kegelstumpf (Zylinderkoordinaten) [5]

(a) Berechnung der Rotation:

$\mathbf{v}$ in Zylinderkoordinaten : $$\mathbf{v} = \rho^2\,\mathbf{e}_\rho + \phi\,\mathbf{e}_z\,.$$

Divergenz von $\mathbf{v}$: $$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} &= \frac{1}{\rho}\partial_\rho\left(\rho v_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\partial_\phi v_\phi + \partial_z v_z \\ &= \frac{1}{\rho}\partial_\rho\left(\rho\,\rho^2\right) + 0 + \partial_z(\phi) = \boxed{3\rho}\,.\end{aligned}$$

(b) Direkte Berechnung des Fluss-Integrals über die Deckel-, Boden- und Mantelfläche des Kegelstumpfs:

Flächenelement Deckel: $$\mathrm{d}\mathbf{S}_D = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathbf{e}_z \quad \rho\in[0,2H],\ \phi\in[0,2\pi]\,, z = H\,,$$
$$\mathrm{d}\mathbf{S}_D\cdot\mathbf{v} = \rho\phi\,,$$

Fluss durch Deckel: $$\begin{aligned}\Phi_D &= \int_D \mathrm{d}\mathbf{S}\cdot\mathbf{v} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2H}\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho\,\rho\phi \\ &= \boxed{4\pi^2 H^2}\,.\end{aligned}$$

Flächenelement Boden: $$\mathrm{d}\mathbf{S}_B = -\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathbf{e}_z \quad \rho\in[0,H],\ \phi\in[0,2\pi]\,, z = \tfrac{1}{2}H\,,$$
$$\mathrm{d}\mathbf{S}_B\cdot\mathbf{v} = -\rho\,\phi\,,$$

Fluss durch Boden: $$\begin{aligned}\Phi_B &= \int_B \mathrm{d}\mathbf{S}\cdot\mathbf{v} = -\int_0^{2\pi}\int_0^{H}\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\rho\,\rho\phi \\ &= \boxed{-\pi^2 H^2}\,.\end{aligned}$$

Parametrisierung Mantel: $$\rho = 2z,\quad \phi\in[0,2\pi],\quad z\in[0,H],$$

dann $$\mathbf{r}(\phi,z) = 2z\,\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z\,.$$

Flächenelement Mantel: $$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathbf{S}_M &= \mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\,(\partial_\phi\mathbf{r})\times(\partial_z\mathbf{r}) \\ &= \mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\,(2z\mathbf{e}_\phi)\times(2\mathbf{e}_\rho + \mathbf{e}_z) = \mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\,2z(-2\mathbf{e}_z + \mathbf{e}_\rho)\,.\end{aligned}$$

Vorzeichen: gewährleistet Fluss von oben/innen nach unten/außen.

Fluss durch Mantel:

$$\Phi_M = \int_M \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_{H/2}^{H} \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}z \left(2z\rho^2 - 4z\phi\right) = \boxed{\tfrac{15}{4}\pi H^4 - 3H^2\pi^2},$$

Gesamter Fluss:

$$\Phi = \Phi_D + \Phi_B + \Phi_M = \boxed{\tfrac{15}{4}\pi H^4}.$$

(c) Alternativ, mittels Satz von Gauß:

Satz von Gauß:

$$\Phi = \int_{D+B+M} \mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{v} = \int_K \mathrm{d}V (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v}) \; .$$

Das Volumenelement des Kegelstumpfs ist durch $\mathrm{d}V = \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}z \, \rho \, \mathrm{d}\rho$ gegeben, die Divergenz aus Teilaufgabe (a) bekannt. Mit den Integralgrenzen $0 \le \phi \le 2\pi$, $H/2 \le z \le H$, $0 \le \rho \le 2z$ ergibt sich:

$$\Phi_M = \int_0^{2\pi} \int_{H/2}^{H} \int_0^{2z} \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\rho \, \rho \, 3\rho = 2\pi \int_{H/2}^{H} \mathrm{d}z \, 8z^3 = \boxed{\tfrac{15}{4}\pi H^4}. \checkmark$$

[Gesamtpunktzahl Aufgaben: 60]
