LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

FAKULTÄT FÜR PHYSIK
R: RECHENMETHODEN FÜR PHYSIKER, WISE 2015/16
DOZENT: JAN VON DELFT
ÜBUNGEN: BENEDIKT BRUOGNOLO, DENNIS SCHIMMEL, FRAUKE SCHWARZ, LUKAS WEIDINGER

http://homepages.physik.uni-muenchen.de/~vondelft/Lehre/15r/

Probeklausur: Rechenmethoden

Lösung Aufgabe 1: Integrale [5]

(a) Wir berechnen das Integral mittels Substitution und Partialbruchzerlegung:

Substitution: $u = x^{10}$ $\qquad I_1 = \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{x^9}{(x^{10}-2)(3-x^{10})} = \frac{1}{10}\int_0^1 \mathrm{d}u \frac{1}{(u-2)(3-u)}$

Partialbruchzerlegung: $\qquad = \frac{1}{10}\int_0^1 \mathrm{d}u \left(\frac{1}{u-2} + \frac{1}{3-u}\right) = \frac{1}{10}\Big[\ln|u-2| - \ln|3-u|\Big]_0^1$

$$= \boxed{\tfrac{1}{10}\ln\left(\tfrac{3}{4}\right)}.$$

(b) Wir benutzen Kugelkoordinaten mit $r^2 = x^2+y^2+z^2$:

$$I_2 = \int_K \mathrm{d}^3x \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$$

Kugelkoordinaten $\qquad = \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \, r^2 \sin\theta \frac{1}{r^2\sqrt{1-r^2}}$

Über θ und ϕ integrieren: $\qquad = 4\pi \int_0^1 \mathrm{d}r \, \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}$

Substitution: $r = \sin u$ $\qquad = 4\pi \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}u \, \frac{\cos u}{\sqrt{1-\sin^2 u}} = 4\pi \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}u \, 1 = \boxed{2\pi^2}.$

Lösung Aufgabe 2: Matrixdiagonalisierung und zweidimensionales Gaußintegral [5]

(a) Eigenwerte: $0 \overset{!}{=} \det(A - \lambda\mathbb{1}) = (5-\lambda)(2-\lambda) - b^2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 - b^2$

$$\Rightarrow \lambda_{1/2} = \tfrac{1}{2}\left(7 \pm \sqrt{49-40+4b^2}\right) = \boxed{\tfrac{1}{2}\left(7 \pm \sqrt{9+4b^2}\right)}.$$

(b) $b = 2:\ \lambda_{1/2} = \frac{1}{2}\left(7 \pm \sqrt{9+16}\right) \ \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 1}.$

$\lambda_1 = 6$: $(A - \lambda_1\mathbb{1})\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{v}_1 \Rightarrow \boxed{\mathbf{v}_1 \propto \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}},.$

$\lambda_2 = 1$: $(A - \lambda_2\mathbb{1})\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{v}_2 \Rightarrow \boxed{\mathbf{v}_2 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}.$

(c) $I = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{e}^{-5x^2-2y^2-4xy} = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{e}^{-\mathbf{r}^T B\mathbf{r}}$ mit $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{r} = (x, y)^T$.
Die Matrix B ist reell und symmetrisch, daher existiert eine orthogonale Transformation $B = SDS^T$, wobei $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Mit $\tilde{\mathbf{r}} = (\tilde{x}, \tilde{y})^T = S^T\mathbf{r}$ lässt sich das Integral I also schreiben als

$$I = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}\tilde{x}\,\mathrm{d}\tilde{y}\,\mathrm{e}^{-\tilde{\mathbf{r}}^T D\tilde{\mathbf{r}}} = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}\tilde{x}\,\mathrm{d}\tilde{y}\,\mathrm{e}^{-\lambda_1\tilde{x}^2-\lambda_2\tilde{y}^2} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tilde{x}\,\mathrm{e}^{-\lambda_1\tilde{x}^2}}_{\sqrt{\frac{\pi}{\lambda_1}}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tilde{y}\,\mathrm{e}^{-\lambda_2\tilde{y}^2}}_{\sqrt{\frac{\pi}{\lambda_2}}} = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}.$$

Dabei haben wir genutzt, dass die Matrix S orthogonal ist und für die Jacobi-Determinante daher $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\tilde{x},\tilde{y})}\right| = 1$ gilt. Die Matrix B entspricht der Matrix A aus Teilaufgabe (a), für $b = 2$. Ihre Eigenwerte sind, laut Aufgabe (b), $\lambda_1 = 6$ und $\lambda_2 = 1$. Wir erhalten daher $\boxed{I = \frac{\pi}{\sqrt{6}}}$.

Lösung Aufgabe 3: Differentialgleichungen [5]

(a) *Anfangswertproblem:*

DGL ist separabel: $$t^2\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = 1 - g \iff \frac{\mathrm{d}g}{1-g} = \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

Integration: $$\int_{g(t_0)}^{g(t)} \frac{\mathrm{d}g'}{1-g'} = \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}t'}{t'^2}$$

$$\Rightarrow -\ln\frac{1-g(t)}{1-g(t_0)} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{t_0}$$

Anfangswert: $$t_0 = 1,\; g(t_0) = 0$$

$$\Rightarrow -\ln(1-g(t)) = -\frac{1}{t} + 1$$

Lösung des Anfangswertproblems: $$\boxed{g(t) = 1 - e^{1/t-1}}\,.$$

(b) *Partikuläre Lösung und Anfangswertproblem:*

Homogene Lösung: $y_h(t) = Ce^{3t}$

Variation der Konstante: $y_p(t) = C(t)e^{3t}$

Einsetzen: $\dot{C}(t)e^{3t} + 3C(t)e^{3t} = 3C(t)e^{3t} + te^t \Rightarrow \dot{C}(t) = te^{-2t}$

Partielle Integration:
$$\begin{aligned} C(t) &= \int te^{-2t}\mathrm{d}t + \text{const} \\ &= -\frac{1}{2}te^{-2t} - \int\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2t} + \text{const} \\ &= -\frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2t} + \text{const} \\ &= \left(-\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{-2t} + \text{const} \end{aligned}$$

Partikuläre Lösung: $y_p(t) = -\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\right) e^t$

Allgemeine Lösung: $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ce^{3t} - \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\right) e^t$

Anfangswert: $y(0) = 0 \Rightarrow 0 = C - \frac{1}{4} \Rightarrow C = 1/4$

Lösung des Anfangswertproblems: $y(t) = \boxed{\frac{1}{4}e^{3t} - \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\right) e^t}\,.$

Lösung Aufgabe 4: Basistransformation [5]

(a) Die Vektoren der Standardbasis werden folgendermaßen abgebildet:

Rotation: $\mathbf{e}_1 \overset{A}{\mapsto} \cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2$ $\qquad \mathbf{e}_2 \overset{A}{\mapsto} -\sin\theta\mathbf{e}_1 + \cos\theta\mathbf{e}_2$

Streckung: $\mathbf{e}_1 \overset{B}{\mapsto} s_1\mathbf{e}_1$ $\qquad \mathbf{e}_2 \overset{B}{\mapsto} s_2\mathbf{e}_2$

Für $\theta = \frac{\pi}{4}$ gilt $\cos\theta = \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \equiv s$. Die Matrixdarstellungen lauten somit:

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} s & -s \\ s & s \end{pmatrix}}\,, \qquad \boxed{B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}}\,.$$

Die beiden linearen Abbildungen kommutieren nicht miteinander. Dies kann man z.B. daran erkennen, dass ihre darstellenden Matrizen nicht kommutieren:

$$\begin{pmatrix} 3s & -\frac{2}{3}s \\ 3s & \frac{2}{3}s \end{pmatrix} = AB \neq BA = \begin{pmatrix} 3s & -3s \\ \frac{2}{3}s & \frac{2}{3}s \end{pmatrix}.$$

(b) Für $\mathbf{y}$ erhält man: $\mathbf{y} = BA\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3s & -3s \\ \frac{2}{3}s & \frac{2}{3}s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -3s \\ 2s \end{pmatrix}}\,.$

Dann ergibt sich $\mathbf{x}'$ aus: $\mathbf{y} = D\mathbf{x}' \ \Rightarrow \mathbf{x}' = D^{-1}\mathbf{y}.$

Invertierung von D : $D = BAB$

$\Rightarrow D^{-1} = B^{-1}A^{-1}B^{-1}$

Somit: $\mathbf{x}' = D^{-1}\mathbf{y} = B^{-1}A^{-1}B^{-1}BAx$

$$= B^{-1}x = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 3 \end{pmatrix}}\,.$$

(c) Darstellung $\tilde{\mathbf{x}}'$ von $\mathbf{x}'$: $\tilde{\mathbf{x}}' = T\mathbf{x}' = AB\mathbf{x}' =$

$$= \begin{pmatrix} 3s & -\frac{2}{3}s \\ 3s & \frac{2}{3}s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -s \\ 3s \end{pmatrix}}\,.$$

Darstellung $\tilde{D}$ von D : $\tilde{D} = TDT^{-1} = ABBABB^{-1}A^{-1} = ABB$

$$= \begin{pmatrix} 3s & -\frac{2}{3}s \\ 3s & \frac{2}{3}s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 9s & -\frac{4}{9}s \\ 9s & \frac{4}{9}s \end{pmatrix}}\,.$$

Lösung Aufgabe 5: Taylorentwicklung [5]

(a)
$$\begin{aligned} f(x) = \mathrm{e}^{x+x^2} &= 1 + (x+x^2) + \tfrac{1}{2}(x+x^2)^2 + \mathcal{O}\left(x^3\right) \\ &= 1 + x + x^2 + \tfrac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}\left(x^3\right) \\ &= \boxed{1 + x + \tfrac{3}{2}x^2 + \mathcal{O}\left(x^3\right)} \end{aligned}$$

(b) Zu lösende Gleichung: $\ln\left(y^3\right) - y = -2 + x^2$. (1)

Für $x = 1$ gilt $3\ln(y(1)) - y(1) = -2 + 1$ und somit folgt unmittelbar $y(1) = \boxed{1}$.
Taylor-Reihe: $y(x) = y_0 + y_1(x-1) + \frac{1}{2!}y_2(x-1)^2 + \mathcal{O}\left((x-1)^3\right)$, mit $y_n \equiv y^{(n)}(1)$. (2)

Wir wissen bereits, dass $y_0 = \boxed{1}$. Wir bestimmen y_1 und y_2 iterativ durch Gleichsetzen der Taylor-Entwicklungen der linken und rechten Seiten von (1):

d_x(1): $\frac{3}{y}y' - y' = 2x \overset{x=1}{\Rightarrow} \frac{3}{y_0}y_1 - y_1 = 2 \Rightarrow y_1 = \boxed{1}$. (3)

d_x(3): $-\frac{3}{y^2}(y')^2 + \frac{3}{y}y'' - y'' = 2 \overset{x=1}{\Rightarrow} -3 + 2y_2 = 2 \Rightarrow y_2 = \boxed{\frac{5}{2}}$. (4)

Lösung: $y(x) \overset{(2)}{=} \boxed{1 + (x-1) + \frac{5}{4}(x-1)^2 + \mathcal{O}\left((x-1)^3\right)}$.

Lösung Aufgabe 6: Nabla-Identitäten [5]

(a)
$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) &= \partial_k\partial_i A_j\,\epsilon_{ijk} \overset{\text{(i)}}{=} \partial_i\partial_k A_j\,\epsilon_{ijk} \overset{\text{(ii)}}{=} \partial_k\partial_i A_j\,\epsilon_{kji} \overset{\text{(iii)}}{=} -\partial_k\partial_i A_j\,\epsilon_{ijk} \\ &= -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) \overset{\text{(iv)}}{\Rightarrow} \boxed{\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) = \mathbf{0}} \end{aligned}$$

Erläuterung: (i) Satz von Schwarz. (ii) Umbenennung der Summationsindizes: $j \leftrightarrow k$. (iii) Anti-Symmetrie des Levi-Civita-Tensors unter Indexvertauschung. (iv) $B = -B \Rightarrow B = 0$.

(b)
$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\nabla}\times(f\mathbf{A})]_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j f A_k = f\epsilon_{ijk}\partial_j A_k + A_k\epsilon_{ijk}\partial_j f = f\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}\right)_i - \epsilon_{ikj}A_k\left(\boldsymbol{\nabla}f\right)_j \\ &= \boxed{\left[f\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}\right) - \left(\mathbf{A}\times\left(\boldsymbol{\nabla}f\right)\right)\right]_i} \end{aligned}$$

(c)
$$\boldsymbol{\nabla}\times(f\mathbf{A}) = \boldsymbol{\nabla}\times\begin{pmatrix}\sin(y)\\ \frac{y^2}{z}\sin(y)\\ -\frac{x}{z}\sin(y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{x}{z}\cos(y) + \frac{y^2}{z^2}\sin(y)\\ \frac{1}{z}\sin(y)\\ -\cos(y)\end{pmatrix}$$

$$f\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}\right) - \mathbf{A}\times\left(\boldsymbol{\nabla}f\right) = \begin{pmatrix}0\\ \frac{2}{z}\sin(y)\\ 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}z\\ y^2\\ -x\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{z}\cos(y)\\ -\frac{1}{z^2}\sin(y)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\ \frac{2}{z}\sin(y)\\ 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-\frac{y^2}{z^2}\sin(y) + \frac{x}{z}\cos(y)\\ +\frac{1}{z}\sin(y)\\ \cos(y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{y^2}{z^2}\sin(y) - \frac{x}{z}\cos(y)\\ \frac{1}{z}\sin(y)\\ -\cos(y)\end{pmatrix} = \boxed{\boldsymbol{\nabla}\times(f\mathbf{A})} \quad \checkmark$$

[Gesamtpunktzahl Aufgaben: 30]