Probeklausur: Rechenmethoden

20.01.16, Dauer: 90 Minuten, 5 Punkte pro Aufgabe

Aufgabe 1: Integrale [5]
Punkte: (a)[2]; (b)[3]

Berechnen Sie folgende Integrale:

(a) $I_1 := \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{x^9}{(x^{10}-2)(3-x^{10})}$

(b) $I_2 := \int_K \mathrm{d}^3x \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$, wobei K die Vollkugel im $\mathbb{R}^3$ um den Ursprung mit Radius 1 ist.

Aufgabe 2: Matrixdiagonalisierung und zweidimensionales Gaußintegral [5]
Punkte: (a)[1]; (b)[2]; (c)[2]

Gegeben Sei die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & b \\ b & 2 \end{pmatrix}$, mit $b \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A in Abhängigkeit von b.

(b) Bestimmen Sie für den Fall $b = 2$ die Eigenvektoren von A und die diagonalisierende Ähnlichkeitstransformation S, für die $S^{-1}AS$ diagonal ist.

Gegeben sei das zweidimensionale Gaußintegral $I = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{e}^{-5x^2-2y^2-4xy}$.

(c) Schreiben Sie I als Produkt zweier eindimensionaler Gaußintegrale und bestimmen Sie den Wert von I.

Aufgabe 3: Differentialgleichungen [5]
Punkte: (a)[2]; (b)[3]

(a) Die Funktion $g(t)$ erfüllt für $t \geq 1$ die Differentialgleichung

$$t^2\dot{g}(t) = 1 - g(t).$$

Finden Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung für $t \geq 1$ unter der Anfangsbedingung $g(1) = 0$.

(b) Die Funktion $y(t)$ erfüllt die lineare Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = 3y(t) + te^t.$$

Die Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung lautet $y_h(t) = Ce^{3t}$. Finden Sie davon ausgehend eine partikuläre Lösung $y_p(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung durch Variation der Konstanten. Geben Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung unter der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ an.

Aufgabe 4: Basistransformation [5]
Punkte: (a)[1.5]; (b)[1.5]; (c)[2]

Betrachen Sie die folgenden Basistransformationen in $\mathbb{R}^2$, mit Standardbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

A : Rotation um den Winkel $\theta = \frac{\pi}{4}$.

B : Streckung der Achse 1 um den Faktor $s_1 = 3$ und der Achse 2 um den Faktor $s_2 = \frac{2}{3}$.

(a) Finden Sie die Matrixdarstellungen (bezüglich der Standardbasis) von A, B. Kommutieren diese Transformationen miteinander (d.h., gilt $AB = BA$)?

(b) Was ist das Bild $\mathbf{y} = BA\mathbf{x}$ des Vektors $\mathbf{x} = (1, 2)^T$ unter der Transformation BA? Finden Sie den Vektor $\mathbf{x}'$, der unter der Verknüpfung der Abbildungen, $D = BAB$, auf $\mathbf{y}$ abgebildet wird. [Hinweis: $D^{-1} = B^{-1}A^{-1}B^{-1}$.]

(c) Sei $T = AB$ die Transformationsmatrix, deren Matrixelemente den Bezug zwischen der alten und einer neuen Basis $\{\tilde{\mathbf{v}}_i\}$ angeben, $\mathbf{e}_j = \tilde{\mathbf{v}}_i T^i_{\ j}$. Wie lautet die Darstellung $\tilde{\mathbf{x}}' = (\tilde{x}'_1, \tilde{x}'_2)^T$ des Vektors $\mathbf{x}'$ in der $\{\tilde{\mathbf{v}}_i\}$-Basis? Finden Sie die Darstellung $\tilde{D}$ von D in der neuen Basis.

Aufgabe 5: Taylorentwicklung [5]
Punkte: (a)[2]; (b)[3]

(a) Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{x+x^2}$ um den Punkt $x = 0$ bis einschließlich Ordnung $\mathcal{O}\left(x^2\right)$.

(b) Sei $y(x)$ eine reelle und analytische Funktion von x, die für $|x - 1| \ll 1$ folgende Gleichung erfüllt:

$$\ln\left(y^3\right) - y = -2 + x^2 \,. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass $y(1) = 1$ die Gleichung erfüllt. Finden Sie anschließend die enstprechende Lösung $y(x)$ der Gleichung iterativ, mittels einer Reihenentwicklung um den Punkt $x = 1$ bis einschließlich $\mathcal{O}((x-1)^2)$.

Aufgabe 6: Nabla-Identitäten [5]
Punkte: (a)[1.5]; (b)[1.5]; (c)[2]

Gegeben seien ein *allgemeines* Skalarfeld $f(x, y, z)$ und ein *allgemeines* Vektorfeld $\mathbf{A}(x, y, z)$. $\mathbf{A}(x, y, z)$ sei weiterhin zweifach stetig differenzierbar. Beweisen Sie folgende beiden Identitäten

(a) $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) = 0$.

(b) $\boldsymbol{\nabla} \times (f\mathbf{A}) = f\,(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\boldsymbol{\nabla} f)$.

(c) Überprüfen Sie die Identität (b) explizit für die Felder $f(x, y, z) = z^{-1}\sin(y)$ und $\mathbf{A}(x, y, z) = (z, y^2, -x)^T$, indem Sie die linke und rechte Seite getrennt berechnen.

[Gesamtpunktzahl Aufgaben: 30]
