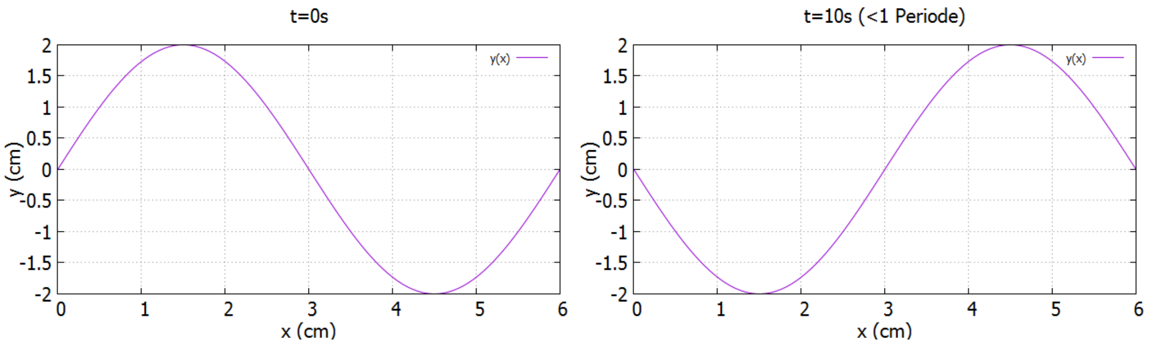
Übungsblatt 12
Besprechung am 19.01.2016

Aufgabe 1

Schwingendes Seil: In folgenden beiden Abbildungen ist eine Welle dargestellt, die sich nach rechts fortbewegt. Links ist sie zur Zeit t = 0 s zu sehen, rechts 10 Sekunden später (die Periodendauer sei größer als 10 s).



a) Bestimmen Sie i) die Wellenlänge der Welle, ii) die Frequenz der Quelle, welche das Seil zum schwingen bringt, sowie iii) die Geschwindigkeit der Welle.

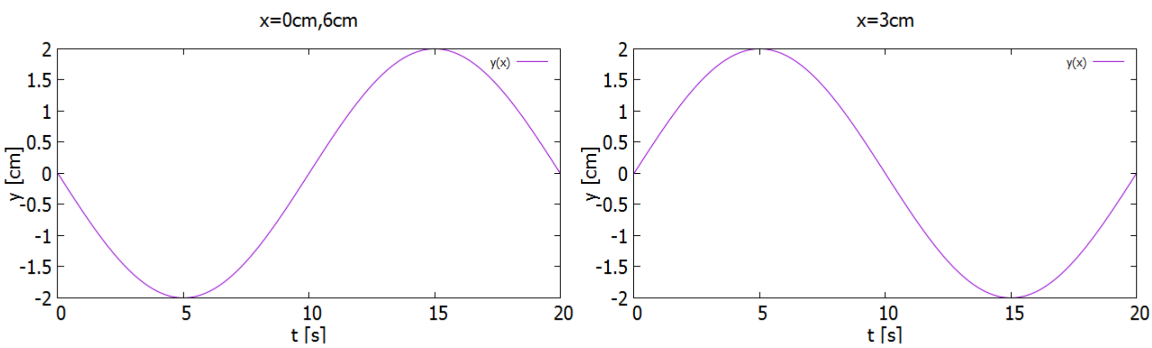
b) Zeichnen Sie einen Graphen der Auslenkung y als Funktion der Zeit für x = 0 cm, x = 3 cm, x = 6 cm jeweils von t = 0 s bis t = 20 s .

c) Stellen Sie eine Gleichung auf, die die Auslenkung y als Funktion von x und t beschreibt.

Aufgabe 1 Lösung

Schwingendes Seil:

a) i) $\lambda = 6$ cm ii) $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{20s} = 0{,}05\ \mathrm{s}^{-1}$ iii) $v = 0{,}3\ \mathrm{cm}\cdot s^{-1}$



c) Gleichung, die die Auslenkung y als Funktion von x und t beschreibt:

$y(x,t) = A \cdot sin(kx - wt) = 2 \cdot sin(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t) = 2 \cdot sin(\frac{2\pi}{6cm}x - \frac{2\pi}{20s}t)$

Aufgabe 2

Klingende Orgelpfeifen: Die Länge einer Orgelpfeife beträgt $L = 1,5$ m. Nehmen Sie an, dass die Orgelpfeife am unteren Ende offen und am oberen Ende geschlossen ist. Bei einem Rohrblasinstrument wie solchen Orgelpfeifen liegen an geschlossenen Enden immer ,,Knoten" der Schwingung und an offenen Enden ,,Schwingungsbäuche"; daher beträgt die Wellenlänge des Grundtons $4 \cdot L$. Hinweis: Insbesondere für Aufgabenteile b) und c) ist es hilfreich, sich die Lage der Schwingung in der Orgelpfeife aufzuzeichnen.

a) Welche Frequenz besitzt der Grundton der Orgelpfeife?

b) Welche Frequenz besitzt der erste Oberton?

c) Wie ändert sich die Tonhöhe des Grundtons der Orgelpfeife, wenn das obere Ende ebenfalls offen ist? Welche Frequenz ergibt sich nun?

d) Welche Frequenz besitzt der erste Oberton einer Orgelpfeife der Länge L_2= 2,5 m

Aufgabe 2 Lösung

Klingende Orgelpfeifen.

a) Für die Wellenlänge des Grundtons gilt: $\lambda_0 = 4L$ und für die Frequenz $f = \frac{c_{Luft}}{\lambda_0} = \frac{340\frac{m}{s}}{4 \cdot 1{,}5m} = 56,7Hz$

b) Für die Wellenlänge des ersten Obertons gilt: $\lambda_1 = \frac{4L}{3}$.
Damit ergibt sich für die Frequenz: $f = \frac{c_{Luft}}{\lambda_1} = \frac{340\frac{m}{s}}{\frac{6m}{3}} = 170Hz$

c) Sofern das obere Ende der Orgel ebenfalls geöffnet ist, gilt für die Wellenlänge des Grundtons: $\lambda_0 = 2L$
Und analog nach a) und b) für die Frequenz: $f = \frac{c_{Luft}}{\lambda_0} = 113,3Hz$.

d) Analog nach b) ergibt sich die Frequenz $f = \frac{c_{Luft}}{\lambda_1} = \frac{340\frac{m}{s}}{\frac{10m}{3}} = 102Hz$

Aufgabe 3

Schwebende Töne: Überlagert man zwei Töne, deren Frequenz sich nur wenig unterscheiden, so entsteht ein modulierter Ton, d.h. seine Lautstärke schwankt mit einer gewissen Frequenz. Dieses Phänomen bezeichnet man in der Akustik als Schwebung.

a) Addieren Sie zwei harmonische Schwingungen $x(t) = Asin(\omega t)$ mit einer Kreisfrequenz ω_1 bzw. ω_2 zu einer Schwingung und berechnen Sie mit Hilfe des Additionstheorems

$$sin(x) + sin(y) = 2cos(\frac{x-y}{2})sin(\frac{x+y}{2})$$

die Modulationsfrequenz, mit der die Lautstärke der Schwebung variiert und die Frequenz des Schwebungstons.

b) Wie verändert sich die Modulationsfrequenz und die Schwebungsfrequenz im Grenzfall $\omega_1 \to \omega_2$?

c) Bei einer Schwebung beträgt der Abstand zweier Momente mit maximaler Lautstärke 0,3 s. Wie groß ist die Frequenz des zweiten Tons, wenn der erste eine Frequenz von 150 Hz besitzt?

Aufgabe 3 Lösung

Schwebende Töne.

a) Es gilt:

$$sin(\omega_1 t) + sin(\omega_2 t) = 2Acos(\underbrace{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}}_{Modulationsfrequenz})sin(\underbrace{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}}_{Tonfrequenz})$$

b) Im Limes $\omega_1 \to \omega_2$ gilt:

$$\tfrac{\omega_1 - \omega_2}{2} \to 0 \text{ und } \tfrac{\omega_1 + \omega_2}{2} \to \omega_1$$

Die Modulation verschwindet also und die Frequenz der Überlagerung entspricht der Frequenz der reinen Einzeltöne.

c) Für die Schwingungsdauer T, der Modulation gilt:

$$T = \tfrac{2\pi}{\omega_{Modulation}} = \tfrac{2\pi}{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}} = \tfrac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2} \to \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \tfrac{4\pi}{T} = 41,9Hz$$

Für den Frequenzunterschied der beiden Töne Δf folgt somit: $\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = 6,7Hz$. Da der erste Ton die Frequenz 150 Hz besitzt, muss der zweite Ton die Frequenz 156,7 Hz oder 143,3 Hz besitzen.

Aufgabe 4

Schwingende Moleküle: Kovalente chemische Bindungen können in erster Näherung als elastische Federn betrachtet werden. Aus diesem Grund schwingen Moleküle um ihre Gleichgewichtslage. Diese Vibrationen lassen sich spektroskopisch beobachten, da das Molekül Licht entsprechender Schwingungsfrequenz absorbiert. Für Deuteriumchlorid (DCl) wurde eine Grundfrequenz von f = 60 THz gemessen. Die dazugehörige (reduzierte) Masse des Moleküls beträgt $3{,}16 \cdot 10^{-27}$ kg.

a) Berechnen sie die Steifigkeit (= Federkonstante) der Bindung.

b) Berechnen sie die Auslenkung der Atome, unter der Annahme, dass die Energie eines Photons mit der entsprechenden Schwingungsfrequenz aufgenommen wird. (E_{photon} = hf mit h = $6,63 \cdot 10^{-34} kg \cdot m^2/s$)

c) Wie groß ist die maximale relative Geschwindigkeit der Atome zueinander?

Aufgabe 4 Lösung

Schwingende Moleküle

a) Die Molekülschwingung kann in erster Näherung als elastische Feder betrachtet werden. Somit gelten die Gleichungen für die harmonische Schwingung und damit die Eigenfrequenz ω_0:
$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{\mu}} \rightarrow D = \omega_0^2 \cdot \mu = (2\pi f)^2 \cdot \mu = 426 kg \cdot s^{-2}$

b) E_{Photon} = hf mit h = 6,63 $\cdot 10^{-34} kgm^2s^{-1}$. Die Energie des Photons E_{Photon} wird vollständig vom Molekül aufgenommen und in die Schwingungsenergie, E_{ges} umgewandelt:

$$E_{Photon} = E_{ges}$$
$$hf = \frac{1}{2} D x_0^2 \rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{2hf}{D}} = 13,6 \cdot 10^{-12} m$$

c) Differenziert man die Bewegungsgleichung der harmonischen Schwingung nach der Zeit, so erhält man die Momentangeschwindigkeit v(t):
x(t)= $x_0 \cdot sin(\omega t + \phi_0)$, v(t)= $x_0 \cdot \omega \cdot cos(\omega t + \phi_0)$
v(t) wird maximal, wenn $cos(\omega t + \phi_0) = 1$ und damit gilt für die maximale relative Geschwindigkeit, v_{max}:
$v_{max} = x_0 \cdot \omega = x_0 \cdot 2\pi f = 5152 ms^{-1}$