# Übungsblatt 8
# Besprechung am 08.12.2015

### Aufgabe 1

**Trouble with Rockets:**
Eine Rakete mit einer anfänglichen Masse $M_i = 850$ kg verbraucht ihren Treibstoff mit einer Rate $R = \frac{dm}{dt} = 2{,}3$ kg/s. Die Geschwindigkeit $v_{rel}$ der Verbrennungsprodukte relativ zum Triebwerk beträgt 3000 m/s

a) Berechnen sie den Schub, also die Kraft, die durch den Ausstoß der Verbrennungsprodukte auf die Rakete wirkt.

b) Wie groß ist die Anfangsbeschleunigung der Rakete? Wurde sie ausreichen um die Rakete abheben zu lassen?

c) Nehmen wir nun an, die Rakete werde von einem im All befindlichen Stützpunkt aus gestartet, wo die Gravitationskraft vernachlässigbar klein ist. Die Masse $M_f$ der Rakete, nachdem sämtlicher Treibstoff verbraucht ist, betrage 180 kg. Wie schnell bewegt sich die Rakete dann realtiv zum Stützpunkt? (Der Start der Rakete beeinflusse die Geschwindigkeit des Stützpunkts selbst nicht.)

**Lösung:**

a) Der Schub T ist gleich dem Produkt aus der Rate des Treibstoffverbrauchs R und der Relativgeschwindigkeit der Verbrennungsprodukte bezüglich des Triebwerks, also der Ausströmgeschwindigkeit:

$$T = R \cdot v_{rel} = 6900N$$

b) Die Beziehung zwischen dem Schub T einer Rakete und dem Betrag a der entstehenden Beschleunigung lautet T = M a mit M als Masse der Rakete. Infolge des Treibstoffverbrauchs nimmt M ab und a zu. Da wir den Anfangswert von a berechnen wollen, müssen wir den Anfangswert $M_i$ der Masse einsetzen:

$$a = \frac{T}{M_i} = 8,1m/s^2$$

Die Anfangsbeschleunigung einer Rakete, die von der Erde abheben soll, muss größer sein als $g = 9{,}8$ m/s$^2$. Anders ausgedrückt,der Schub T des Triebwerks muss die Gravitationskraft $M_i g$ übersteigen. Setzen wir die Zahlenwerte ein, so muss der Schub größer sein als (850 kg)(9,8 m/s$^2$)= 8330 N. Unsere Rakete mit einem Schub von 6900 N kann demzufolge die Erde nicht aus eigener Kraft verlassen, sondern braucht eine schubkräftige Transportrakete.

c) Die Endgeschwindigkeit $v_f$ der Rakete nach dem vollständigen Verbrauch des Treibstoffs hängt vom Verhältnis $M_i/M_f$ der Anfangs- zur Endmasse ab.

$$v_f - v_i = v_{rel} ln \frac{M_i}{M_f}$$

Mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_i = 0$ ist:

$$v_f = v_{rel} ln \frac{M_i}{M_f} \approx 4660 m/s$$

## Aufgabe 2

**Der Brunnen:**
Ein Wassereimer ($m = 10$ kg) hängt an einem Seil ($l = 8$ m), das um die Welle ($r = 7$ cm) eines Handrades gewickelt ist. Das Rad und die Welle haben zusammen einen Trägheitsmoment von $J_{Rad} = 2\ kg \cdot m^2$. Gerade als der volle Eimer oben angekommen ist wird die Kurbel plötzlich losgelassen und der Eimer fällt in den Brunnen. Welche Geschwindigkeit hat der Eimer erreicht als sich das Seil komplett abgewickelt hat?

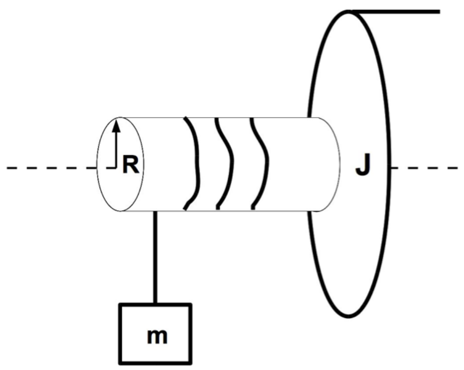


Abbildung 1: Das Förderrad des Brunnens

**Lösung:**

Der Eimer übt eine Kraft auf die Rolle aus, welche sich durch einen Drehmoment $F_g \cdot r$ äussert. Diese Kraft wirkt gegen das Trägheitsmoment des Rads und erzeugt eine Beschleunigung des Rads. Mit:

$$J = \text{Trägheitsmoment}$$
$$\alpha = \frac{a}{r} = \text{Winkelbeschleunigung}$$
$$F_g \cdot r = m \cdot g \cdot r = \text{Durch Gewicht des Eimers erzeugtes Drehmoment}$$

$$J \cdot \alpha = F_g \cdot r \tag{1}$$
$$J \cdot \frac{a}{r} = m \cdot g \cdot r \tag{2}$$
$$a = \frac{m \cdot g \cdot r^2}{J} \tag{3}$$
$$\tag{4}$$

Eingesetzt in $v = \sqrt{2 \cdot l \cdot a}$ ergibt:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 8\,\mathrm{m} \cdot 10\,\mathrm{kg} \cdot 9,81\mathrm{m\ s}^{-2} \cdot (0,07\mathrm{m})^2}{2\mathrm{kg\ m}^2}} = 1,96\mathrm{m/s}$$

Alternativ ist es möglich diese Aufgabe mittels Energieerhaltung zu lösen. Die Potentielle Energie am Anfang entspricht der kinetischen Energie des Eimers und der Rotationsenergie des Förderrads am Ende. Dies führt natürlich zur gleichen Lösung

$$\begin{aligned}
E_{pot} &= E_{kin} + E_{rot} \\
m \cdot g \cdot h &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2 \\
\text{mit } \omega &= \frac{v}{r} \\
m \cdot g \cdot h &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot J \cdot (\frac{v}{r})^2 \\
m \cdot g \cdot h &= \frac{1}{2} \cdot v^2(m + J \cdot \frac{1}{r^2}) \\
\Rightarrow v &= \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g \cdot h}{m + J \cdot \frac{1}{r^2}}}
\end{aligned}$$

## Aufgabe 3

**Stromausfall:**
Der Supercomputer SuperMUC, der im Leibnitz Rechenzentrum in München steht, nimmt eine Leistung von 3500 KW auf. Fällt der Strom aus, muss eine Zeit von $\Delta$t = 10 s bis zum anlaufen des Notstromgenerators überbrückt werden.

a) Wie viele Menschen ($\mathrm{m}_{Mensch}$ = 70 kg) könnt man mit der Energie, die für die Überbrückung dieser 10 s notwendig ist, vom Meeresspiegel auf den Mount Everest (8848 m) schießen? Die Luftreibung ist hierbei zu vernachlässigen.

b) Mit welcher Geschwindigkeit müsste ein schwerer LKW ($\mathrm{m}_{LKW}$ = 30 t) fahren, um diese Energie in Form von kinetischer Energie zu besitzen?

c) Um die Zeit bis der Generator anspringt zu überbrücken benutzten wir eine zylindrische Schwungscheibe ($m_S$ = 600 kg) aus Stahl, mit einem Radius von $r$ = 1 m.

Das Trägheitsmoment ist durch $J_S = \frac{1}{2}mr^2$ gegeben. Die Scheibe wird auf 7000 Umdrehungen pro Minute beschleunigt. Reicht die gespeicherte Energie aus, den Supercomputer so lange zu versorgen?

**Lösung:**

a) Leistung P und Energie E hängen folgendermaßen zusammen:
$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} \rightarrow \Delta E = P \cdot \Delta t = 3,5 \cdot 10^7$ J
Um eine Mensch auf den Mount Everest zu schießen wird eine Energie von $E_{Everest}$=m·g·h=$6,1 \cdot 10^6$ J benötigt. $\frac{\Delta E}{E_{Everest}}$ = 5,7 Man könnte mit dieser Energie also 5 Menschen auf den Mount Everest schießen.

b) Der LKW besitzt ΔE als kinetische Energie:
$\Delta E = \frac{m \cdot v^2}{2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot E}{m}} = 48$ m/s = 173 km/h

c) Die Energie der Scheibe berechnet sich folgendermaßen:

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot (2 \cdot \pi \cdot f)^2$$
$$E_{rot} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot (2 \cdot \pi \cdot \frac{7000}{60s})^2$$
$$E_{rot} = 8,1 \cdot 10^7 \text{ J}$$

Die in der Scheibe gespeicherte Energie reicht also aus, um den SuperMUC zu versorgen bis der Generator anspringt.

## Aufgabe 4

**Impulserhaltung im Kindergarten:**
Zwei Personen auf Bobby Cars fahren mit den Massen $m_1$ und $m_2$ und den Geschwindigkeiten $|v_1| = |v_2| = 10$ km/h frontal ineinander. Die Bobby Cars sind voller Kleber. Deshalb kleben sie nach dem Aufprall aneinander fest und bewegen sich gemeinsam weiter. Wie groß ist die Geschwindigkeit der beiden Personen nach dem Stoß bei einem Massenverhältnis von:
a) 1 : 1 (Kindergartenkind gegen Kindergartenkind)

b) 2 : 1 (Erzieherin gegen Kindergartenkind)

c) 10 : 1 (Sumoringer gegen Kindergartenkind)

d) in welche Richtung bewegen sich die Personen in den jeweiligen Fällen?

e) Was passiert im Fall c), wenn die Autos nicht aneinander kleben. Welche Geschwindigkeit hat das Kind nach dem Zusammenstoß?

**Lösung:**

**Inelastischer Stoß:** Alle Massen bewegen sich als Eine einzige, mit der Geschwindigkeit $v'$, weiter.

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v' \tag{5}$$
$$\Rightarrow v' = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{(m_1 + m_2)} \tag{6}$$

**Elastischer Stoß:** Alle Massen bewegen sich nach dem Stoß mit verschiedenen Geschwindigkeiten weiter. Zur Lösung benötigen wir Energie- und Impulserhaltung:

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' \tag{7}$$
$$\frac{m_1}{2} \cdot v_1^2 + \frac{m_2}{2} \cdot v_2^2 = \frac{m_1}{2} \cdot v_1'^2 + \frac{m_2}{2} \cdot v_2'^2 \tag{8}$$
$$\Rightarrow v_1' = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot (2v_2 - v_1)}{m_1 + m_2} \tag{9}$$
$$\Rightarrow v_2' = \frac{m_2 \cdot v_2 + m_1 \cdot (2v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \tag{10}$$

a) Personen halten sich fest: Stoß ist Unelastisch
aus (2) folgt: $v' = 0$

b) aus (2) folgt: $v' = \frac{v}{3} = 3,33\frac{km}{h}$

c) aus (2) folgt: $v' = \frac{9 \cdot v}{11} = 8,18\frac{km}{h}$

d) In die gleiche Richtung, in die sich die größere Masse vor dem Stoß bewegt hat

e) aus (5) folgt: $v_{Sumo} = \frac{7 \cdot v}{11} = 6,36\frac{km}{h}$

aus (6) folgt: $v_{Kindergartenkind} = \frac{-29 \cdot v}{11} = -26,36\frac{km}{h}$
Das Kind bewegt sich also entgegengesetzt zu seiner ursprünglichen Bewegungsrichtung.