Lösungen zu Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Quadratische Gleichungen. Die allgemeine Lösungsstrategie ist hier die Gleichung auf die Form der „p-q-Formel" zu bringen, d.h. $x^2 + px + q = 0$; die Gleichung hat dann die Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Im allgemeinen haben quadratische Gleichungen zwei Lösungen, wobei die Lösungen komplexe Zahlen sein können. Wir beschäffigen uns aber meistens mit dem Fall, dass die Lösungen reelle Zahlen sind. Die Lösungen können auch zusammenfallen, in diesem Fall ist $x_1 = x_2$.

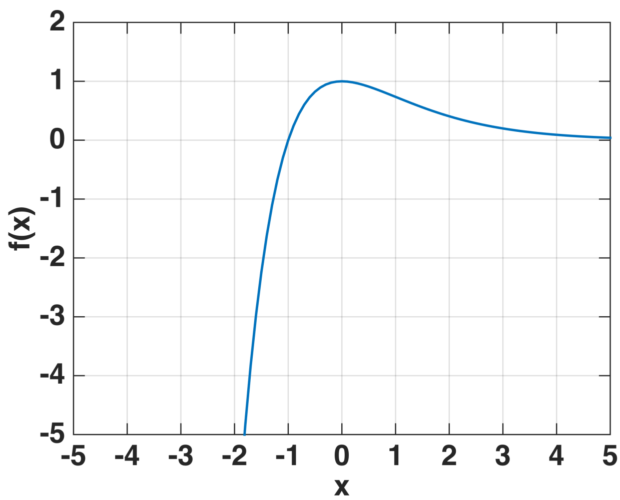
a) $x^2 + 8x + 2 = 0 \Rightarrow$ Einsetzten in die p-q-Formel:
$x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{14}$

b) $x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}$

c) $(2x - 9)^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{9}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

Aufgabe 2

Kurvendiskussion



a) $f(x) = (x + 1) \cdot exp(-x) = 0$, wobei $exp(-x)$ keine Nullstelle besitzt.
Also betrachte nur: $(x + 1) = 0$
$\Rightarrow x = -1$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
Die Exponentialfunktion dominiert. Das $(x + 1)$ gibt das Vorzeichen.

c) Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$ eine waagrechte Asymptote.

d) Es gilt für Achsensymmetrie:
$f(-x) = f(x)$
Für Punktsymmetrie zum Ursprung:
$f(-x) = -f(x)$

Setze „-x " in f(x) ein:
$f(-x) = (-x+1) \cdot exp(-(-x)) = (-x+1) \cdot exp(x)$

$\Rightarrow f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$

e) $f'(x) = -x \cdot exp(-x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

Für max. gilt: $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$
Für min. gilt: $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$

$f''(x) = (x-1) \cdot exp(-x)$ mit $x = 0$ folgt:
$f''(0) = -1 < 0$

$f(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad$ max. bei (0,1)

f) Streng monoton steigend $f'(x) > 0$
Streng monoton fallend $f'(x) < 0$

Aus Teilaufgabe(n) zuvor wissen wir, dass die Funktion bis zum max. streng monoton steigend und danach fallend ist, also:

$]-\infty : 0[$ streng monoton steigend

$]0 : \infty[$ streng monoton fallend

g) Für $f''(x) > 0$ links gekrümmt
Für $f''(x) < 0$ rechts gekrümmt

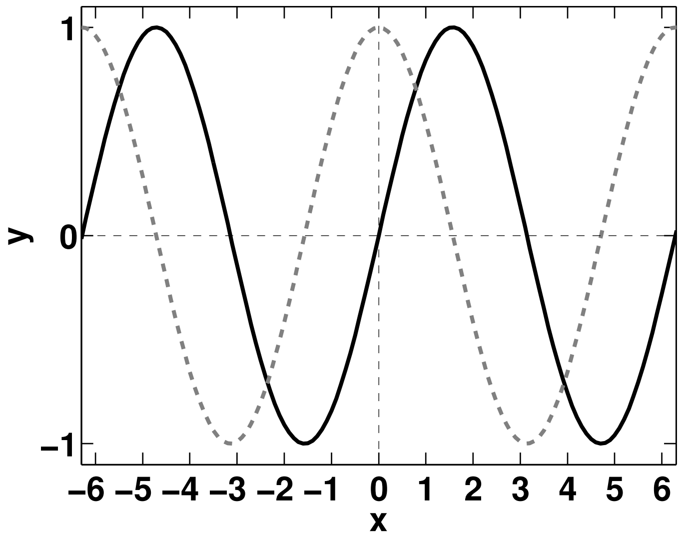
$f''(x) = (x-1) \cdot exp(-x)$, wobei $exp(-x)$ immer größer als null ist.
Betrachte nur $(x-1) > 0 \Rightarrow x > 1$.

Also für $x > 1$ links gekrümmt, sonst rechts gekrümmt.

Aufgabe 3

Trigonometrische Funktionen (Winkelfunktionen).

a) $\sin(x)$ (schwarze, durchgezogene Linie) und $\cos(x)$ (graue, gestrichelte Linie):



b) $sin(x)$: Nullstellen bei $n\pi$, Maxima bei $(4n+1)\frac{\pi}{2}$, Minima bei $(4n+3)\frac{\pi}{2}$.
$cos(x)$: Nullstellen bei $(2n+1)\frac{\pi}{2}$, Maxima bei $2\pi n$, Minima bei $(2n+1)\pi$.

c) $arcsin(x) = sin^{-1}(x)$ & $arctan(x) = tan^{-1}(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)}$

d)

$$\sin\alpha = \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}); \quad \cos\alpha = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$$

e) Erste und zweite Ableitung der Funktion $f(x) = \cos(4x+3)$:

$$f'(x) = -4\sin(4x+3); \quad f''(x) = -16\cos(4x+3)$$

f) Umrechnung von Grad- und im Bogenmaß:
Grad = Bogenmaß $\cdot 180°/\pi$
Bogenmaß = Grad $\cdot \pi/180°$
$70° \approx 1{,}22$ rad; $1rad \approx 57{,}29°$; $2{,}0\pi$ rad $= 360°$.

g)

$$\sin\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \sin\alpha = 10 \text{ cm} \cdot \sin(25°) \approx 4,22 \text{ cm}$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot \cos\alpha = 10 \text{ cm} \cdot \cos(25°) \approx 9,06 \text{ cm}$$