Übungsblatt 10
Besprechung am 12.01.2016

Aufgabe 1

Strömende Fluide und die Bernoulli-Gleichung
Gegeben sei ein Behälter mit Durchmesser D aus dem über ein Rohr mit Durchmesser d Wasser abläuft (siehe Skizze). Der Wasserstand H kann durch den Zufluss mit der Flussrate Q_1 reguliert werden. Betrachten Sie das Wasser als ideale Flüssigkeit.

a) Wie groß ist der statische Druck im Punkt 1?

$$p_1 = \rho g H$$

b) Mit welcher Geschwindigkeit strömt das Wasser im Punkt 2 mittig aus dem Rohr aus?

Bernoulli:

$$p_2 = \frac{1}{2}\rho v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2p}{\rho}} = \sqrt{2g(H-(h+\frac{d}{2}))}$$

c) Wie groß muss die Zuflussrate Q_1 sein, damit sich der Wasserpegel im Behälter nicht ändert?

$$Q_1 = Q_2 = A_2 v = (\frac{d}{2})^2 \pi v$$

d) An welchem Punkt auf der X-Achse des gezeigten Koordinatensystem trifft das Wasser auf, das mittig (also bei d/2) aus dem Rohr strömt.

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h_0$$

mit

$$h_0 = h + \frac{d}{2} \rightarrow t = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

$$x(t) = vt = \sqrt{\frac{2p}{\rho}\frac{2h_0}{g}} = \sqrt{\frac{4p(h+\frac{d}{2})}{\rho g}} = 2\sqrt{(H-(h+\frac{d}{2}))(h+\frac{d}{2})}$$

Aufgabe 2

Venturirohr mit Staurohr

Eine ideale Flüssigkeit mit der Dichte ρ strömt durch eine sich verengende Röhre mit senkrechten Steigrohren an vier Stellen.

a) Wie schnell strömt Wasser unter Röhre II, wenn es bei Steigröhre I mit v_1 fließt?

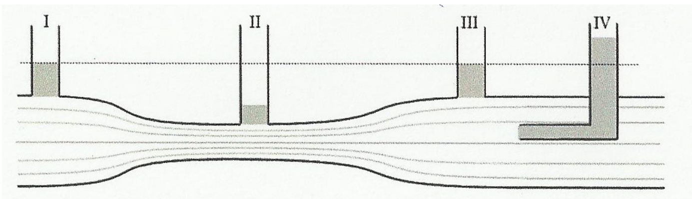
Kontinuität:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2, wobei A_1, A_2$$

der Querschnitt des Rohrs unter den jeweiligen Röhren I und II ist $\rightarrow$

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

b) Zeichnen Sie in die Skizze qualitativ die Höhe des Wasserstandes in den Steigrohren ein. Die Rohrquerschnitte A_1, A_3 und A_4 seien gleich.



c) Berechnen Sie quantitativ die Höhenunterschiede Δh_{II}, Δh_{III} und Δh_{IV} des Wasserstandes zur Referenzlinie als Funktion von v_1, A_1 und A_2.

Strömungsgeschwindigkeit $v_3 = v_4 = v_1$ (Da Rohrquerschnitt identisch)
Bernoulli: $p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 = const.$ (Energieerhaltung in einer strömenden Flüssigkeit) Kein Beitrag der potentiellen Energie, da $z_i = const.$
$\rightarrow p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \rightarrow p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) = \frac{1}{2}\rho v_1^2(1 - (\frac{A_1}{A_2})^2)$
Mit $p_2 - p_1 = \Delta p_{II} = \rho g \Delta h_{II} \rightarrow \Delta h_{II} = \frac{v_1^2}{2g}(1 - (\frac{A_1}{A_2})^2)(< 0)$
$\Delta p_{IV} = p_4 - p_1 = \rho g \Delta h_{IV} = \frac{1}{2}\rho v_1^2 \rightarrow \Delta h_{IV} = \frac{v_1^2}{2g}$

d) Geben sie das Volumen, das durch die gegebene Apperatur fließt, in Abhängigkeit von t an.

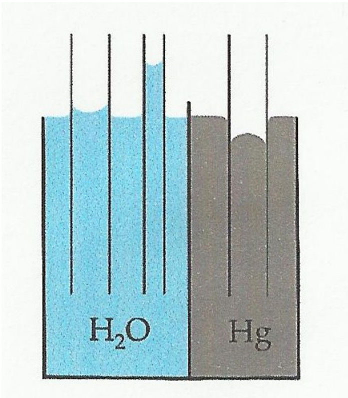
$V = (v_1 \cdot t) A_1$

Aufgabe 3

Oberflächenspannung und Kapillarkraft

Die Steighöhe h einer Flüssigkeitssäule ist gegeben durch $h = \frac{2\sigma cos\alpha}{\rho g r}$. Berechnen Sie die Steighöhe der drei abgebildeten Röhren bei 293,15 K auf Meereshöhe und zeichnen Sie diese unter berücksichtigung des Kontaktwinkels ein. Die großen Glasröhren haben einen Durchmesser von 0,5 cm, die kleinste halb so groß.

Die Oberflächenspannung beträgt $\sigma_{H_2O} = 0,073 \frac{J}{m^2}$ bei 293,15 K und $\sigma_{Hg} = 0,476 \frac{N}{m}$ bei 293,15 K für $\alpha_{Hg} = 140°$ und $\alpha_{H_2O} = 20°$. Dichte $\rho_{H_2O} = 1000 \frac{kg}{m^3}$, $\rho_{Hg} = 13,55 \frac{g}{cm^3}$ bei 293,15 K
$h_{H_2Ogroß} = 0,002797046m = 0,28cm$
$h_{H_2Oklein} = 0,005594093m = 0,56cm$
$h_{Hggroß} = -0,001096863m = -0,1cm$



Aufgabe 4

Cargo Lifter

Der Zeppelin Cargo Lifter war das Transportluftschiff der deutschen Cargolifter AG, die im Jahr 2002 Insolvenz anmeldete. Der Zeppelin war ungefähr zylinderförmig mit einer Länge von 260 m und einem Durchmesser von 65 m und mit (gasförmigem) Helium (Dichte $\rho_{H_2} = 0,18 kg/m^3$) gefüllt.

a) Was ist die Auftriebskraft der Heliumfüllung? Was ist die daraus resultierende maximale Startmasse, d.h. die maximale Masse der Zeppelinkonstruktion, der Passagiere und der Nutzlast?

   Volumen: $V = \pi R^2 L = \pi(\frac{d}{2})^2 L = \pi \cdot (\frac{65}{2})^2 \cdot 260m = 8,6 \cdot 10^5 m^3$
   $F_{Auftrieb} = gV(\rho_{Luft} - \rho_{Helium}) = 9,81 \frac{m}{s^2} \cdot 8,6 \cdot 10^5 m^3 (1,2 \frac{kg}{m^3} - 0,18 \frac{kg}{m^3})$
   $= 8,6 \cdot 10^6 N$
   $m_{Start} = \frac{F_{Auftrieb}}{g} = 8,6 \cdot 10^5 kg = 860t$

b) Die Reisegeschwindigkeit des Zeppelins wäre 125 km/h. Wie groß ist die Luftreibungskraft, die dabei überwunden werden muss? (Hinweis: Sie dürfen die Formel der Newton Reibung benutzen; $C_\omega = 0,05$)

   $F_{Reibung} = \frac{1}{2} \cdot \rho_{Luft} \cdot A \cdot C\omega \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,2 \frac{kg}{m^3} \cdot (\frac{65}{2})^2 \pi \cdot 0,05 \cdot (125 \frac{km}{h})^2 = 12 \cdot 10^4 N$

c) Was ist die Motorleistung, die nötig ist, um mit konstanter Geschwindigkeit von 125 km/h zu fliegen, wenn der Gesamtwirkungsgrad der Motoren und Propeller $\eta = 0,3$ beträgt?

   Leistung: $P = F_{Reibung} \cdot v = 12 \cdot 10^4 N \cdot 34,7 \frac{m}{s} = 4,2 \cdot 10^6 W$
   $P_{Motor} = \frac{P}{0,3} = 14 \cdot 10^6 W$