Übungsblatt 6
Lösung

Aufgabe 1

Gravitation.

a) Berechnen Sie die Beschleunigung g auf der Sonnenoberfläche.
Gegeben sind: $m_s = 1.99 \cdot 10^{30}\ kg,\ G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg \cdot s^2},\ r_s = 6.957 \cdot 10^5\ km$

Lösung:

Die Gravitationskraft wird mit der Anziehungskraft auf der Sonne gleichgesetzt:

$$G \cdot \frac{m_0 m_s}{r_s^2} = m_0 \cdot g \tag{1}$$

wobei m_0 eine beliebige Masse ist (kürzt sich in der Gleichung weg). Einfaches umstellen nach g ergibt:

$$g = G\frac{m_s}{r_s^2} = 274\frac{m}{s^2} \approx 28 \text{ x Erdanziehung} \tag{2}$$

b) In welcher Entfernung zum Erdmittelpunkt wird ein Objekt schwerelos, wenn es sich zwischen Erde und Mond befindet (also, wenn es von der Erde und dem Mond gleichermaßen angezogen wird, wobei alles außer Erde und Mond vernachlässigbar ist)?
Gegeben sind: Entfernung Erdmittelpunkt zum Mondmittelpunkt $r = 3.844 \cdot 10^5\ km$ und $m_{Mond} = \frac{1}{81} m_{Erde}$

Lösung:

Damit ein Objekt für den oben beschriebenen Fall schwerelos wird, muss es von der Erde und vom Mond mit derselben Kraft angezogen werden:

$$F = G\frac{m_0 m_E}{r_1^2} = G\frac{m_0 m_M}{r_2^2} \tag{3}$$

wobei r_1 den Abstand des Objekts vom Erdmittelpunkt darstellt und r_2 den Abstand vom Mondmittelpunkt. m_E ist die Masse der Erde und m_M die Masse des Mondes. Setzt man für $m_E = 81 m_M$ ein und kürzt man G und m_0 folgt:

$$\frac{81 m_M}{r_1^2} = \frac{m_M}{r_2^2} \tag{4}$$

r ist gegeben als der Abstand vom Erdmittelpunkt zum Mondmittelpunkt. Dann ist $r_2 = r - r_1$. Setzt man das in Gleichung (4) ein folgt:

$$\frac{81 m_M}{r_1^2} = \frac{m_M}{(r - r_1)^2} \tag{5}$$

Dividieren mit m_M und umstellen der Gleichung ergibt:

$$81 \cdot (r - r_1)^2 - r_1^2 = 0 \tag{6}$$

$$\Rightarrow r_1 = 0.9 \cdot r \tag{7}$$

Das bedeutet z.B. für ein Satelliten, der sich bei $r_1 = 0.9r = 3.459 \cdot 10^5$ km vom Erdmittelpunkt entfernt und zwischen Erde und Mond befindet gleichermaßen von der Erde und vom Mond angezogen wird. Die Orte, an denen sich die Gravitationskräfte zweier Himmelskörper aufheben heißt auch Lagrangepunkt. Zwei Himmelskörper haben mehrere Lagrangepunkte. In einem der Lagrangepunkte zwischen Erde und Sonne befindet sich das Weltraumteleskop 'Herschel'.

c) Die Erde wird plötzlich angehalten und folgt nur noch der Anziehungskraft der Sonne. Also wird sie aus dem Stillstand heraus zur Sonne hin beschleunigt. Welche Strecke legt die Erde nach einer Minute zurück?
Gegeben sind: Entfernung Sonnenmittelpunkt zum Erdmittelpunkt $r = 149.5 \cdot 10^6\ km$, Umlaufdauer der Erde $T = 365\ d$

Lösung:

Da die Erde sich auf einer (annähernd) kreisförmigen Bahn bewegt, muss die Anziehungskraft die von der Sonne auf die Erde ausgeübt wird gleich der Zentrifugalkraft sein (die nach außen zeigt). Um die Beschleunigung in Richtung der Sonne herauszufinden benötigen wir die Beschleunigung die von der Sonne weg zeigt. Die Winkelgeschwindigkeit (bzw. Kreisfrequenz) der Erde um die Sonne beträgt:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{(60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365)s} = 1,9924 \cdot 10^{-7} s^{-1} \tag{8}$$

Daraus folgt für die Zentrifugalbeschleunigung (die gleich der Beschleunigung in Richtung der Sonne ist):

$$a = r\omega^2 \tag{9}$$

Die Erde wird angehalten, also hat sie keine Anfangsgeschwindigkeit. Der Anfangsort wird auf $s_0 = 0$ m gesetzt, es folgt für die Strecke nach einer Minute:

$$s = \frac{1}{2} a t^2 = 10,7m \tag{10}$$

Aufgabe 2

Energie.

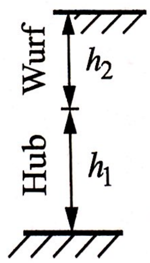
a) Ein Auto fährt mit $v = 120\ \frac{km}{h}$ gegen ein unbewegliches Hindernis. Welcher Höhe h entspricht die Geschwindigkeit, wenn man es mit einem freien Fall vergleicht?

Lösung:

$$\frac{mv^2}{2} = mgh \tag{11}$$

$$\rightarrow h = \frac{v^2}{2g} = \frac{\left(\frac{120}{3.6}\frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 9.81\frac{m}{s^2}} = 56,63m \tag{12}$$

b) Ein Objekt der Masse m soll senkrecht auf die Höhe $h = h_1 + h_2$ gehoben werden. Es wird die Strecke h_1 mit einer Hubkraft beschleunigt, die Strecke h_2 steigt es ohne Hubkraft (also ohne Beschleunigung) weiter (siehe Bild).
Beachte: Das Objekt wird mit einer Kraft $-F_g$ von der Erde angezogen. Also muss die Hubkraft der Erdanziehung entgegengesetzt wirken und größer sein als F_g, damit es nach oben beschleunigt wird. Die Hubkraft wird als konstant angenommen. Drücken Sie die Beschleunigung a durch g, h_1 und h_2 aus.



Lösung:

Die Kraft, mit der das Objekt von der Erde angezogen wird, beträgt $F_g = -mg$. Damit es nach oben beschleunigt wird muss die Hubkraft größer sein als F_g und in die entgegengesetzte Richtung zeigen: $F_{Hub} = m(g + a)$, wobei a eine positive Beschleunigung ist (auch g ist positiv, damit die Kraft entgegengesetzt und größer ist als F_g).
Das Objekt wird die Strecke h_1 konstant mit der Kraft F_{Hub} beschleunigt, dabei gilt: Kraft x Weg = Arbeit [= Energie].
Die potentielle Energie am Ort h_1 beträgt hingegen: $E_{pot,h_1} = mgh_1$
Die Differenz der beiden ist die kinetische Energie:

$$F_{Hub}h_1 - mgh_1 = \frac{mv^2}{2} \tag{13}$$

$$\rightarrow (g + a)mh_1 - mgh_1 = \frac{mv^2}{2} \tag{14}$$

Ab der Höhe h_1 muss das Objekt mit der gewonnenen kinetischen Energie auf die Höhe h_2 kommen, also gilt:

$$\frac{mv^2}{2} = mgh_2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh_2} \tag{15}$$

Nun setzt man v aus Gleichung (15) in Gleichung (14) ein:

$$(g+a)h_1 - gh_1 = gh_2 \tag{16}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{g} = \frac{h_2}{h_1} \tag{17}$$

c) Eine Person wirft ein Sack ($m = 40\ kg$) mit einer Hubkraft $F = 500\ N$ auf eine Höhe von $h = 1,50\ m$.
Welche Strecke h_1 (analog zur Teilaufgabe b) muss die Person die Hubkraft aufbringen? Wie lange dauert der Gesamtvorgang?

Lösung:

$$F_{Hub} = (g+a)m \rightarrow a = \frac{F}{m} - g = \frac{500N}{40kg} - 9,81\frac{m}{s^2} = 2.69\frac{m}{s^2} \tag{18}$$

Mit der Gleichung (17) aus der Teilaufgabe b) und $h_2 = h - h_1$ folgt:

$$\frac{a}{g} = \frac{h-h_1}{h_1} \Rightarrow h_1 = \frac{h}{(\frac{a}{g})+1} = 1,18m \tag{19}$$

Bis zur Höhe h_1 wird der Sack konstant mit a beschleunigt.

$$\frac{1}{2}at_1^2 = h_1 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{a}} = 0,94s \tag{20}$$

Die restliche Höhe h_2 wirkt die Erdbeschleunigung g und bremst den Sack ab:

$$h_2 = -\frac{1}{2}gt_2^2 + vt_2 \Rightarrow t_{2_{1,2}} = \frac{v \pm \sqrt{v^2 - 4\frac{1}{2}gh_2}}{g} \tag{21}$$

Mit $v = at_1 = 2,53\frac{m}{s}$ eingesetzt in Gleichung 21 folgt:

$$t_{2_{1,2}} = 0.22\ s,\ 0.29\ s \tag{22}$$

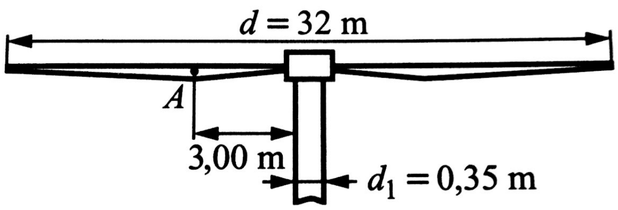
Ohne eine Geschwindigkeit von $v = 2.53\frac{m}{s}$ am Ort $h_1 = 1.18m$ würde der Vorgang $h_2 = \frac{1}{2}gt_2^2 \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}} = 0.26s$ dauern. Mit der Geschwindigkeit v muss es weniger dauern, also ist $t_2 = 0.22\ s$
Für die Gesamtdauer gilt somit: $t_g = t_1 + t_2 = 1.16s$

Aufgabe 3

Fliehkraft.

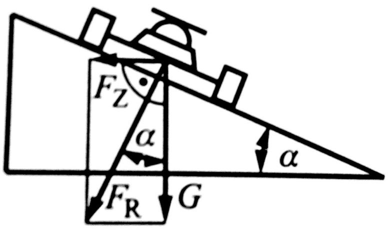
a) Bei einer Hochgeschwindigkeitsrennstrecke soll eine kreisförmige Kurve mit Radius $r = 500\ m$ mit einer max. Geschwindigkeit $v = 310\ \frac{km}{h}$ durchfahren werden, wobei eine Komponente der Schwerkraft als Zentripetalkraft wirken soll, so dass keine seitwärts gerichteten Kräfte auf die Räder wirken. Welcher Neigungswinkel α der Fahrbahn mit der Horizontalen muss bei der Rennstreckenplanung berücksichtigt werden?

b) Die Tragschraube eines 8-blättrigen schweren Transporthelikopters hat den Durchmesser $d = 32\ m$. Die Rotorblätter sind an der Rotorachse befestigt (siehe Bild). Berechne die Fliehkraft F_Z mit der ein Rotorblatt die Lager der Rotorwelle belastet, wenn diese ein Durchmesser $d_1 = 350\ mm$ ausweist, ein Blatt 300 kg wiegt, der Schwerpunkt A sich 3 m vom Befestigungspunkt an der Rotorwelle befindet, die Drehzahl $n = 100\ min^{-1}$ beträgt.



Lösung:

zur a:
Der Neigungswinkel α der Fahrbahn muss so groß sein, dass die Resultierende aus der Fliehkraft F_Z und der Gewichtskraft G senkrecht in Richtung Fahrbahn weist; mit $tan(\alpha) = \frac{F_Z}{G}$ und $G = mg$.
Mit $F_Z = m\frac{v^2}{r}$ wird $tan(\alpha) = \frac{m\frac{v^2}{r}}{mg} = \frac{v^2}{gr}$. Somit ist $\alpha = 56,5°$:



zur b:
Mit $F_Z = mr\omega^2$, dem wirksamen Radius $r = 3,0m + 0,175m = 3,175m$ und mit $\omega = 2\pi n$ bzw. mit $\omega = \frac{\pi n}{30}$ (Drehzahl n in min^{-1}) $= 10,472s^{-1}$ ergibt sich
$F_Z = 300kg \cdot 3,175m \cdot (10,472s^{-1})^2 = 104$ kN.

Aufgabe 4

Reibung. Ein Fahrrad rollt eine Strecke von 300 m bei einem Gefälle von 3% abwärts. Anschließend rollt es eine Strecke x mit einer Steigung von 3% aufwärts. Welche

Strecke x legt es zurück, wenn der Fahrwiderstand (d.h. Reibungskoeffizient; ohne Luftreibung, die hier vernachlässigt werden soll) $\mu = 0.03$ beträgt?

Lösung:

Man berechnet ein Gefälle in Grad folgendermaßen um:

$$\text{Gefälle} = \frac{\text{Höhe}}{\text{Länge}} \cdot 100 \Rightarrow \frac{3}{100} = \frac{\text{Höhe}}{\text{Länge}} \tag{23}$$

$$\rightarrow tan(\alpha) = \frac{3}{100} \Rightarrow \alpha = tan^{-1}(\frac{3}{100}) \tag{24}$$

Den Winkel kann man erst mal so belassen und nicht explizit ausrechnen.

Die Differenz der potentiellen Energie zwischen der Startposition und Endposition entspricht der Energie, die durch Reibung verloren geht:

$$E_{pot,start} - E_{pot,end} = E_r \tag{25}$$

$$mgs\ sin(\alpha) - mgx\ sin(\alpha) = mg\mu(s + x)\ cos(\alpha) \tag{26}$$

Dividieren der Gl. (26) mit $mg \cdot cos(\alpha)$ ergibt:

$$stan(\alpha) - xtan(\alpha) = \mu(s + x) \tag{27}$$

$$\Rightarrow x = \frac{s \cdot (tan(\alpha) - \mu)}{\mu + tan(\alpha)} \tag{28}$$

Da $tan(\alpha) = tan(tan^{-1}(\frac{3}{100})) = \frac{3}{100} = 0,03 = \mu$ ist, wird der Zähler gleich null. Also wird das Fahrrad auf der Strecke s soweit abgebremst, dass es nach der Strecke s stehenbleibt und nicht mehr den Hang hochfährt.

$\rightarrow x = 0$ m

Erhöht man z.B. das Gefälle von 0.03% auf 0.04% würde das Fahrrad eine Strecke von $42,85$ m aufwärts fahren.