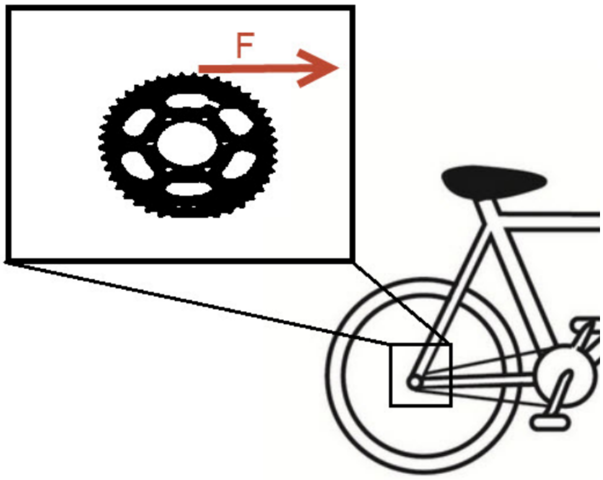
Lösung - Übungsblatt 9
Besprechung am 15.12.2015

Aufgabe 1

Indoor biking
Fritz möchte Fahrrad fahren. Draußen ist es ihm aber zu kalt, also stellt er sein Fahrrad im Wohnzimmer auf einen Ständer, so dass das Hinterrad in der Luft hängt und sich frei in der Luft drehen kann. Beim treten übt die Kette eine Kraft von $F = 21$ N auf den Zahnkranz aus. Dieser hat einen Radius von $r_Z = 7cm$. Das Hinterrad hat eine Masse von $m = 1,4$ kg und einen Durchmesser von 28 Zoll (wobei 1 Zoll = 2,54 cm). Das Hinterrad kann vereinfacht als Ring mit Radius r beschrieben werden ($\Rightarrow I = mr^2$). Reibung und Luftwiderstand können im Folgendem vernachlässigt werden.



a) Berechnen Sie die Winkelbeschleunigung des Hinterrads

Für das Drehmoment M gilt:

$$M = I\dot{\omega} = F \cdot r_Z$$

Dies löst man nach $\dot{\omega}$ auf:

$$\dot{\omega} = \frac{M}{I} = \frac{Fr_Z}{mr^2} = \frac{21N \cdot 0,07m}{1,4kg \cdot (0,5 \cdot 28 \cdot 0,0254m)^2} = 8,3s^{-2}$$

b) Wie lange dauert es, bis das Rad eine Tangentialgeschwindigkeit von 15 m/s hat? (Überlegen Sie sich welche Winkelgeschwindigkeit es dazu bräuchte)

Da die Kraft konstant bleibt und wir aus der Ruhe starten gilt für ω:

$$\omega = \dot{\omega}t$$

Für die Tangentialgeschwindigkeit v gilt:

$$v = \omega \cdot r = \dot{\omega} \cdot t \cdot r$$

Aufgelöst nach t ergibt sich dann:

$$t = \frac{v}{\dot{\omega} r} = \frac{15 \frac{m}{s}}{8,3 s^{-2} \cdot (14 \cdot 0,0254 m)} = 5,08 s$$

Aufgabe 2

Eiskunstläuferin
Eine Eiskunstläuferin bringt sich durch ein geschicktes Manöver in eine Rotation um ihre Längsachse. Zu Beginn hat sie die Arme ausgestreckt und dreht sich einmal pro Sekunde. Zur Vereinfachung betrachten wir ihren Körper als Vollzylinder der Dichte $\rho = 1$ kg/l mit einem Durchmesser von 35 cm und einer Höhe $h = 1,7$ m. Die Arme seien Massenpunkte mit 3kg, ausgestreckt haben sie den Abstand 80 cm von der Drehachse.

a) Berechnen Sie den Drehimpuls der Eisläuferin mit ausgestreckten Armen

Für den Drehimpuls L gilt: $L = I\omega$
Eine Drehung pro Sekunde entspricht einer Winkelgeschwindigkeit von $\omega_1 = 2\pi s^{-1}$
Um das Trägheitsmoment I der Eisläuferin zu berechnen berechnen wir zunächst das Trägheitsmoment des Zylinders I_Z:

$$I_Z = \rho \int_V r^2 dV$$

Für das Trägheitsmoment eines Zylinders bietet es sich an in Zylinderkoordinaten zu rechnen:

$$I_Z = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^R r^2 \cdot r \, dr \, d\varphi \, dz = \rho \, 2\pi \, h \int_0^R r^3 \, dr = \rho \, \frac{\pi}{2} \, h \, R^4 =$$
$$= \frac{1}{2} M_Z \, R^2 = \frac{\pi}{2} \cdot 1000 \frac{kg}{m^3} \cdot 1,7m \; (0,175m)^4 = 2,5 kgm^2$$

Für die ausgestreckten Arme, die wir als punktförmige Massen betrachten können gilt jeweils:

$$I_{A1} = mr^2 = 3kg \cdot (0,8m)^2 = 1,92 kgm^2$$

Somit gilt:

$$L = I_1 \omega_1 = (I_Z + 2 \cdot I_{A1})\omega = 2\pi s^{-1} \cdot (2,5 kgm^2 + 2 \cdot 1,92 kgm^2) = 39,8 \frac{kgm^2}{s}$$

b) Nun legt sie die Arme eng an ihren Körper, wir nehmen an, dass sich die Arme angelegt auf der Zylinderoberfläche befinden. Wie schnell dreht sie sich?

Das Trägheitsmoment, das durch die Arme entsteht verändert sich nun, da sich die Arme nun am Körper im Abstand von $r_2 = 0,175m$ befinden:

$$I_{A2} = mr_2^2 = 3kg \cdot (0,175m)^2 = 0,09kgm^2$$

$$\Rightarrow I_2 = I_Z + 2 \cdot I_{A2} = 2,68kgm^2$$

Aus der Drehimpulserhaltung $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$ folgt:

$$\omega_2 = \omega_1 \cdot \frac{I_1}{I_2} = 2\pi s^{-1} \cdot \frac{I_Z + 2\,I_{A1}}{I_Z + 2\,I_{A2}} = 2\pi s^{-1} \cdot \frac{6,34}{2,68} = 14,87s^{-1}$$

Dies entspricht etwa 2,4 Umdrehungen pro Sekunde

c) Wie ändert sich die Rotationsenergie?

$$E_1 = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 \; E_2 = \frac{1}{2}I_2\omega_2^2$$

$$\Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \frac{I_2\omega_2^2}{I_1\omega_1^2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = 2,37$$

Beim Heranziehen der Arme verrichtet die Eiskunstläuferin Arbeit und erhöht so die Energie auf mehr als das doppelte.

Aufgabe 3

Atmen unter Wasser

Man könnte unter Wasser durch einen Schlauch atmen, dessen Ende aus dem Wasser herausragt. Dem wirkt allerdings bei zunehmender Tiefe der die Lungen komprimierende Wasserdruck entgegen. Wir nehmen an, dass man bei einer Kraft von 500 N auf dem Brustkorb, welcher eine Fläche von 0,1 m^2 hat gerade noch atmen kann. Wie weit unter der Wasseroberfläche darf sich ihr Brustkorb maximal befinden? (Die Dichte von Wasser ist ρ =1000 kg/m^3)

Wir können die folgenden zwei Gleichungen benutzen um die Höhe h zu berechnen:

$$p = \frac{F}{A} \; p = \rho \cdot g \cdot h$$

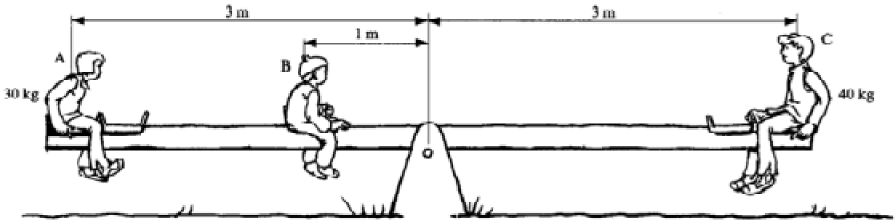
Durch Gleichsetzen und umformen erhält man:

$$h = \frac{F}{A \cdot \rho \cdot g} = \frac{500N}{0,1m^2 \cdot 1000kgm^{-3} \cdot 9,81ms^{-2}} = 0,5097m \approx 51cm$$

Anmerkung: Die maximale Länge von Schnorcheln sollte für Erwachsene bei 35cm liegen. (Quelle: DLRG, Deutsche Lebens-Rettungs-Gesellschaft)

Aufgabe 4

Drehmoment am Kinderspielplatz



a) Drei Kinder sitzen auf einer Wippe. Wie schwer muss Kind B sein, damit die Wippe im Gleichgewicht ist?

Damit die Wippe im Gleichgewicht ist, muss das Drehmoment auf beiden Seiten gleich sein:

$$D_L = D_R$$

$$\Rightarrow M_A \cdot g \cdot 3m + M_B \cdot g \cdot 1m = M_C \cdot g \cdot 3m$$

$$\Rightarrow M_B = 3 \cdot (M_C - M_A) = 30kg$$

b) Die Wippe sei auf einer Höhe $h = 50cm$ gelagert. Nehmen sie an, die Wippe sei ohne Masse.
Kind B verlässt nun die Wippe. Wie lange dauert es, bis der Balken auf der Seite von Kind C auf den Boden trifft?

Zuerst überlegen wir uns, um welchen Winkel φ die Wippe geneigt ist, wenn eine ihrer Enden den Boden berührt. Aus einer einfachen geometrischen Überlegung folgt:

$$\sin(\varphi) = \frac{h}{3m} \Rightarrow \varphi = \arcsin(\frac{h}{3m}) = \arcsin(\frac{1}{6}) = 0,167rad$$

Auf der rechten Seite wirkt nun ein Drehmoment $D_R = 40kg \cdot g \cdot 3m$, auf der linken Seite ein entgegen gerichtetes Drehmoment $D_L = 30kg \cdot g \cdot 3m$.
Dies resultiert in ein Drehmoment $D_0 = 10kg \cdot g \cdot 3m$, das tangential zu Drehung nach unten zeigt. Nach $D = I \cdot \dot{\omega}$ induziert dieses Drehmoment eine Winkelbeschleunigung:

$$\dot{\omega} = \frac{D}{I} = \frac{10kg \cdot g \cdot 3m}{30kg \cdot (3m)^2 + 40kg \cdot (3m)^2} = 0,46\frac{1}{s^2}$$

Mit dieser Winkelbeschleunigung kann man analog zur normalen"Beschleunigung rechnen:

$$\frac{1}{2}\dot{\omega}\, t^2 = \varphi \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2\varphi}{\dot{\omega}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,167}{0,46s^{-2}}} = 0,85s$$

Anmerkung: Diese Rechnung ist lediglich eine Näherung, da sobald die Wippe etwas geneigt ist Kraft $\vec{F}$ und Vektor $\vec{r}$ nicht mehr senkrecht zueinander stehen.