Lösungen zu Übungsblatt 7

Aufgabe 1

Landung auf dem Halleyschen Kometen.
Sie planen die Landung einer Raumsonde (Masse $m_S = 100$ kg) auf dem Halleyschen Kometen. Der Komet hat eine Masse von $M = 2 \cdot 10^{14}$ kg und kann als Kugel mit einem Radius von $R \approx 5{,}7$ km genähert werden. Die Gravitation anderer Himmelskörper soll in dieser Aufgabe vernachlässigt werden.

a) Stellen sie eine Gleichung für die *Fluchtgeschwindigkeit* v_F auf (Dies ist die notwendige Geschwindigkeit um den Kometen zu verlassen und seinem Gravitationsfeld vollständig zu entkommen).

Zur Herleitung der Fluchtgeschwindigkeit setzten wir die Summe aus kinetischer Energie plus der potentiellen Energie der Gravitation gleich Null, denn im Unendlichen ist dann sowohl die potentielle als auch die kinetische Energie Null.

$$\frac{1}{2} m v_F^2 + \left(-G \frac{Mm}{R} \right) = 0$$

Daraus folgt

$$v_F = \sqrt{2 G \frac{M}{R}}$$

b) Was ist die Fluchtgeschwindigkeit v_F für den Halleyschen Kometen?

Einsetzen der Werte liefert $v_F = 2{,}16$ m/s.

c) Die Raumsonde fliegt nun mit einer Geschwindigkeit v auf den Kometen (den wir als in Ruhe befindlich annehmen) zu. Wir betrachten das Auftreffen der Sonde auf dem Planeten zunächst als eindimensionalen und vollständig elastischen Stoß. Was ist die Geschwindigkeit der Raumsonde nach dem Stoß? Wie groß darf v maximal sein, damit die Sonde nach dem Zusammenstoß im Schwerefeld des Kometen bleibt?

Wir haben hier die Situation eines elastischen Stoßes mit ,,schwerem Ziel". Dabei gilt für die Geschwindigkeit der Sonde nach dem Stoß u

$$u \approx -v$$

v darf also maximal 2,16 m/s betragen, sonst fliegt die Sonde nach dem Stoß mit (mehr als) Fluchtgeschwindigkeit vom Kometen weg.

d) Nun gehen wir davon aus, dass sich die Sonde mit $v = 12$ m/s dem Kometen annähert und sich bei der Landung mit Harpunen fest in der Oberfläche des Planeten verankert. Was ist die Geschwindigkeit des vor dem Stoß in Ruhe befindlichen Kometen nach dem Stoß?

Hier handelt es sich um einen unelastischen Stoß. Sonde und Komet fliegen nach dem Stoß mit

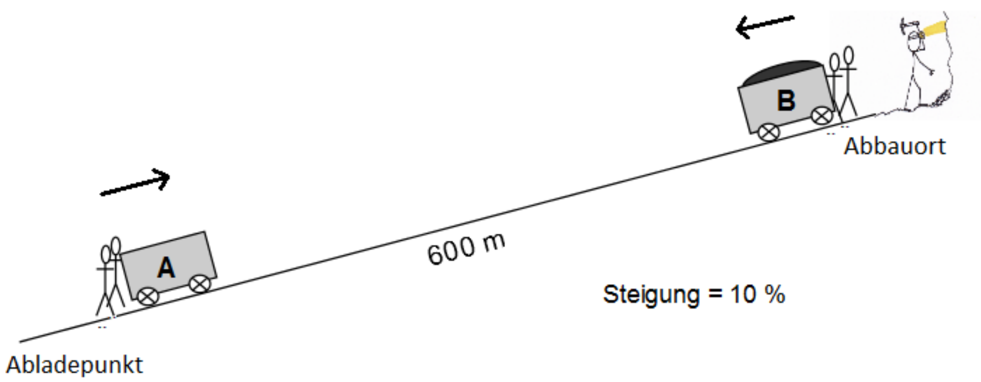
$$u \approx \frac{m_S}{m_S + M} v = \frac{100}{100 + 2 \cdot 10^{14}} 12 \text{ m/s} = 6 \cdot 10^{-12} \text{ m/s}$$

gemeinsam weiter, eine kaum/nicht messbare Geschwindigkeit.

Aufgabe 2

Harte Arbeitsbedingungen!

In den Minen von Potosi, Bolivien wird noch mit altmodischen Mitteln gearbeitet: Das Silbererz wird mit Eisenwagen an Gleisen entlang aus dem 'Silberberg' befördert. Die Strecke zwischen aktuellem Abbauort und dem Abladepunkt des Erzes, außerhalb des Berges, beträgt 600 m. Die Gleise haben eine leichte Steigung von 10 % (Siehe Grafik). Der leere Wagen A (m_A= 200 kg) wird von zwei Arbeitern mit einer Geschwindigkeit von 1 m/s in die Mine hinein geschoben, während Wagen B, welcher mit 600 kg Erz beladen ist, von zwei Minenarbeitern gesteuert, die Gleise hinab rollt (Anfangsgeschwindigkeit am Abbauort, $v_{B,0}$= 0 m/s). Die Wagen stoßen inelastisch auf halber Strecke aufeinander und rollen zusammengekoppelt bis zum Abladepunkt. Man nehme an, dass die Minenarbeiter (Masse jeweils m_M= 70 kg) von Wagen B während der gesamten Abfahrt mitfahren, und die von Wagen A nach dem Stoß auf ihren Wagen springen. Die Bewegung auf den Gleisen läuft reibungsfrei ab.



a) Welche Geschwindigkeit hat der beladene Wagen B (mit den zwei Arbeitern) direkt vor dem Stoß?

Die Steigung beträgt 10 %, d.h. pro 100 m in x-Richtung steigt die Höhe in y-Richtung um 10 m. Der Winkel der Steigung beträgt somit $\alpha = \arctan\left(\frac{10}{100}\right) \approx$

$5,7°$. Die Höhe des Abbauortes, relativ zum Abladepunkt ist dann $600m \cdot \sin(\alpha) = 59,6m$.Auf halber Strecke (direkt vor dem Stoß) hat Wagen B, mit zwei Arbeitern, also 29,8 m Höhenmeter zurückgelegt. Die potentielle Energie des Wagens wird in kinetische Energie umgewandelt:

$$m_B gh = \frac{1}{2} m_B \cdot v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = 24,2ms^{-1}$$

b) Mit welcher Geschwindigkeit fahren die beiden Wagen (mit den vier Arbeitern!) direkt nach dem inelastischen Stoß gemeinsam weiter?

Es gilt Impulserhaltung:

$$(m_B + 2m_M)v_B - m_A v_A = (m_A + m_B + 4m_M)v_{NachSto\ss}$$

$$\Rightarrow v_{NS} = \frac{(m_B + 2m_M)v_B - m_A v_A}{m_A + m_B + 4m_M} = 16,8ms^{-1}$$

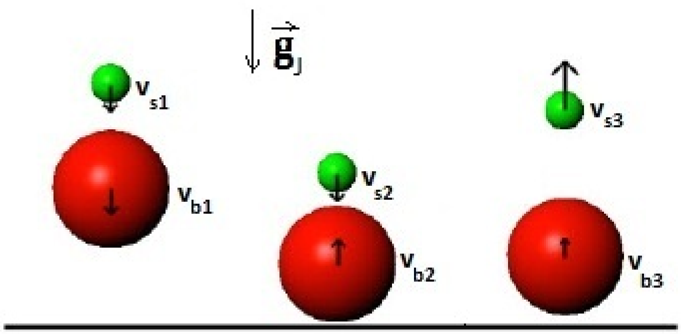
c) Welche Geschwindigkeit haben die beiden Wagen wenn sie den Abladepunkt erreichen?

Es gilt Energieerhaltung: $(E_{Kin} + E_{Pot})_{Anfang} = (E_{Kin} + E_{Pot})_{End}$.
Sei $(m_A + m_B + 4m_M) = M$, dann ist

$$\frac{1}{2} \cdot M \cdot v_{NS}^2 + Mgh = \frac{1}{2} \cdot M \cdot v_{End}^2 \Rightarrow v_{End} = 29,4ms^{-1}$$

Aufgabe 3

Springende Kugeln.
Zwei Kugeln werden auf Jupiter (Gravitationskonstante, g_J = 24,8 m/s^2) übereinander und gleichzeitig fallen gelassen. Die Massen sind m_s = 100 g für die kleine Kugel und m_b = 1 kg für die große Kugel entsprechend der Skizze. Direkt nach dem Aufprall der großen Kugel bewegt sich diese bereits mit einer Geschwindigkeit von $v_{b2} = 15 \, \frac{m}{s}$ in die Höhe, während sich die kleine Kugel mit der Geschwindigkeit $v_{s2} = -v_{b2}$ noch in Richtung Boden bewegt. Dadurch treffen die beiden Kugeln genau frontal aufeinander und stoßen vollkommen elastisch.



a) Mit welcher Geschwindigkeit wird die kleine Kugel nach dem Zusammenstoß in die Höhe geschleudert? (Überlegen Sie sich einen geeigneten Koordinatennullpunkt für die Bewegung der kleinen Kugel)

Es liegt ein elastischer Stoß vor, also gilt Impuls- und Energieerhaltung:
$p_{vorher} \stackrel{!}{=} p_{nacher} \Leftrightarrow m_s v_{s2} + m_b v_{b2} = m_s v_{s3} + m_b v_{b3}$
$E_{vorher} \stackrel{!}{=} E_{nacher} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(m_s v_{s2}^2 + m_b v_{b2}^2) = \frac{1}{2}(m_s v_{s3}^2 + m_b v_{b3}^2)$

Aus der Impulserhaltung folgt:

$$v_{s3} = \frac{m_s v_{s2} + m_b v_{b2} - m_b v_{b3}}{m_s} = \frac{-15\frac{m}{s}0.1kg + 1kg15\frac{m}{s} - 0.1kgv_{b3}}{0.1kg} = 135\frac{m}{s} - 10v_{b3}$$

Setze dieses Ergebnis in Energiegleichung ein:

$$0.1kg(-15\frac{m}{s})^2 + 1kg(15\frac{m}{s})^2 = 0.1kg(135\frac{m}{s} - 10v_{b3})^2 + 1kgv_{b3}^2$$

$$\Leftrightarrow 247,5\frac{m^2}{s^2} = 1822,5\frac{m^2}{s^2} + 10v_{b3}^2 - 270\frac{m}{s}v_{b3} + v_{b3}^2 \Leftrightarrow 11v_{b3}^2 - 270\frac{m}{s}v_{b3} + 1575 = 0.$$

$$v_{b3} = \frac{270 \pm \sqrt{270^2 - 4 \cdot 11 \cdot 1575}}{2 \cdot 11}\frac{m}{s} \Rightarrow v_{b3,1} = 15\frac{m}{s}, v_{b3,2} = 9,54\frac{m}{s}.$$

$$\Rightarrow v_{s3,1} = (135 - 150)\frac{m}{s} = -15\frac{m}{s}, v_{s3,2} = 39,5\frac{m}{s}$$

Dabei ist $v_{s3,1}$ die Geschwindigkeit vor dem Stoßund $v_{s3,2} =: v_{s3}$ die gesuchte Geschwindigkeit nach dem Stoß.

b) Welche Höhe erreicht die kleine Kugel, bevor sie wieder zu Boden fällt?

Das Koordinatensystem ist hier so gewählt, dass der y-Nullpunkt (y-Koordinate beschreibt die Höhenangabe) am Ende der roten Kugel liegt (roter Kugeldurchmesser d_b ab Boden für Offset des Koordinatensystems). So ist für die zu berechnende Höhe des springenden kleinen Balls nach dem elastischen Stoß nicht der Durchmesser der roten Kugel aufzuaddieren.

$$E_{kin,s3} \stackrel{!}{=} E_{pot,s3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}m_s v_{s3}^2 = m_s g_J h_{s3} \Leftrightarrow h_{s3} = \frac{v_{s3}^2}{2g_J} \Leftrightarrow h_{s3} = \frac{(39,5\frac{m}{s})^2}{2 \cdot 24,8\frac{m}{s^2}} = 31,5m.$$