Übungsblatt 11
Lösungen

Aufgabe 1

Ungedämpfter harmonischer Oszillator:

Eine Masse m schwingt Reibungsfrei an einer Feder mit der Federkonstante D und der maximalen Auslenkung A_0. Jetzt wird die Auslenkung der Masse auf $3\,A_0$ verdreifacht. Wie ändern sich:

a) die maximale Rückstellkraft

b) die maximale Geschwindigkeit

c) die maximale kinetische und potentielle Energie

d) die Gesamtenergie, also die Summe aus kinetischer und potentieller Energie

Aufgabe 1 Lösung

a) $F_2 = 3F_1$

b) $v_2 = 3v_1$

c) $E_{pot,2} = 9E_{pot,1}$ und $E_{kin,2} = 9E_{kin,1}$

d) $E_{ges,2} = 9E_{ges,1}$

Aufgabe 2

Molekülschwingung.
Die Kraft zwischen den zwei H-Atomen (im Abstand x zueinander) eines Wasserstoffmoleküls ist definiert durch $F = -c(x - x_0)$. Die Masse des H-Atoms ist gegeben durch $m_H = 1,67 \cdot 10^{-27} kg$, die Federkonstante beträgt $c = 800 Nm^{-1}$ und x_0 ist der Gleichgewichtsabstand zwischen den H-Atomen.

a) Stellen Sie die Differentialgleichung der Bewegung auf und lösen Sie diese.

b) Mit welcher Eigenfrequenz f Schwingen die beiden Atome zueinander?

Aufgabe 2 Lösung

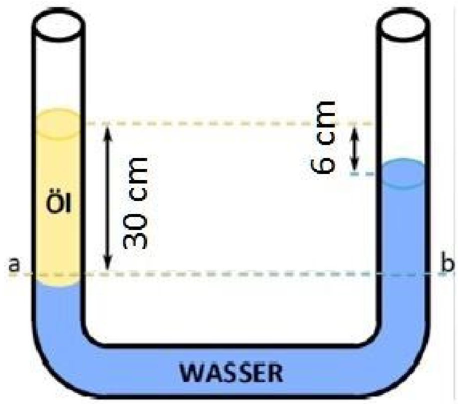
a) Bewegungsgleichung: $m_H\ddot{y} + cy = 0$ mit y ausgefürter Oszillationsweg.
Lösungsansatz: $y(t) = k_1 sin(\omega t + k_2)$
Differenzieren wir diese Gleichung zweimal nach der Zeit, ergibt sich:
$\ddot{y}(t) = -\omega^2 k_1 sin(\omega t + k_2)$
Einsetzen in die Bewegungsgleichung liefert $\omega^2 = \frac{c}{m_H}$
Die Anfangsbedingungen seien $y(t=0) = x_0$ und $\dot{y}(t=0) = 0$. $\Rightarrow x_0 = k_1 sin(k_2)$ und $0 = \omega k_1 cos(k_2) \Rightarrow k_2 = \frac{\pi}{2}, k_1 = x_0 \Rightarrow y(t) = x_0 sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$

b) Für die Eigenkreisfrequenz ergibt sich $\omega = \sqrt{\frac{c}{m_H}} \approx 6,92 \cdot 10^{14} \frac{rad}{s}$ und für die Eigenfrequenz $f = \frac{\omega}{2\pi} \approx 1,1 \cdot 10^{14} Hz$

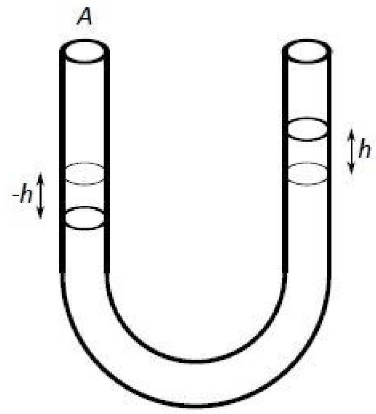
Aufgabe 3

Schwingende Wassersäule in einem U-Rohr.
Es seien die zwei folgenden Situationen gegeben:

a) In ein U-förmiges Rohr mit zwei offenen Enden wird Wasser und dann Öl (vermischen sich nicht) hineingegossen. Sie kommen in die Gleichgewichtslage, wie in Abbildung dargestellt. Wie groß ist die Dichte des Öls? (Hinweis: Die Druckwerte an den Punkten a und b sind gleich.)



b) Betrachten Sie nun folgende Situation



In einem U-Rohr mit Querschnittsfläche $A = 1,2cm^2$ befindet sich Wasser der Dichte $\rho = 1000kgm^{-3}$, welches im rechten Teil des Rohres bis zur Höhe h über dem Ruhepegel steht und im linken bis zur Höhe $-h$. Die gesamte Wassersäule hat die Länge $L = 0,4m$ und die dynamische Viskosität des Wassers ist $\eta = 1 \cdot 10^{-3} kgm^{-1}s^{-1}$. Bestimmen Sie die Masse der zu bewegenden Wassersäule und die vorhandene Rückstellkraft bzw. Rückstellkonstante mithilfe von $\Delta p = 2\rho gh$.

c) Stellen Sie die allgemeine Bewegungsgleichung mit Dämpfung auf und bestimmen Sie die Eigenfrequenz.(Hinweis: Nach dem Gesetz von Hagen-Poiseuille gilt für die Dämpfung $\gamma = 8\pi\eta L$).

d) Bestimmen Sie die Abklingkonstante $\tau = \delta^{-1} = \frac{2m}{\gamma}$.

Aufgabe 3 Lösung

a) $p_a = p_b \Leftrightarrow \rho_{Oel} g h_{Oel} = \rho_{H20} g h_{H2O}$

$\Leftrightarrow \rho_{Oel} = \rho_{H2O} \frac{h_{H2O}}{h_{Oel}} = 1000 \frac{kg}{m^3} \frac{(30-6)cm}{30cm} = 800 \frac{kg}{m^3}$

b) Bestimmung der Masse: $m = \rho V = \rho AL = \frac{1kg}{1000cm^3} 1,2cm^2 40cm = \frac{48}{1000} kg$
Bestimmung der Rückstellkonstante: Allgemein gilt: $F = -cx$ und $F = pA$. $\Delta p = 2\rho gh \Rightarrow -ch = A2\rho gh \Leftrightarrow c = -2\rho gA = -2 \cdot 9,81 \cdot 0,12 \frac{kg}{s^2} \approx -2,35 \frac{kg}{s^2}$

c) Die Bewegungsgleichung ist allgemein gegeben durch:

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + cx = 0$$

$$\overset{Einsetzen}{\Rightarrow} \rho AL\ddot{x} + 8\pi\eta L\dot{x} + 2\rho gAx = 0$$

Für die Eigenfrequenz folgt: $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\rho gA}{\rho AL}} \approx 1,11Hz$

d) $\gamma = 8\pi\eta L = 8\pi 0,4m 10^{-3} \frac{kg}{ms} \approx 1,01 \cdot 10^{-2} \frac{kg}{s}$
$\tau = \frac{2m}{\gamma} \approx 9,5s$