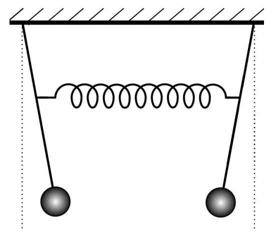
Aufgabenblatt 11

Übungen E1 – Mechanik WS 2017/2018

Dozent: Prof. Dr. Hermann Gaub
Übungsleitung: Dr. Martin Benoit und Dr. Res Jöhr

Verständnisfragen



i.) Was versteht man bei Schwingungen unter dem Begriff der Schwebung?

ii.) Welche Phasenbeziehung besteht bei einem getriebenen harmonischen Oszillator zwischen der Anregung und der erzeugten Schwingung?

iii.) Erklären Sie kurz wie eine Kinderschaukel funktioniert.

iv.) Betrachten Sie das gekoppelte Pendel in der nebenstehenden Abbildung und beschreiben Sie 3 mögliche Schwingungsmoden.

Aufgabe 1 *(Gedämpfte Oszillation)*

Die Frequenz eines gedämpften Oszillators ω habe sich gegenüber der Eigenfrequenz ω_0 um 10 % verringert.

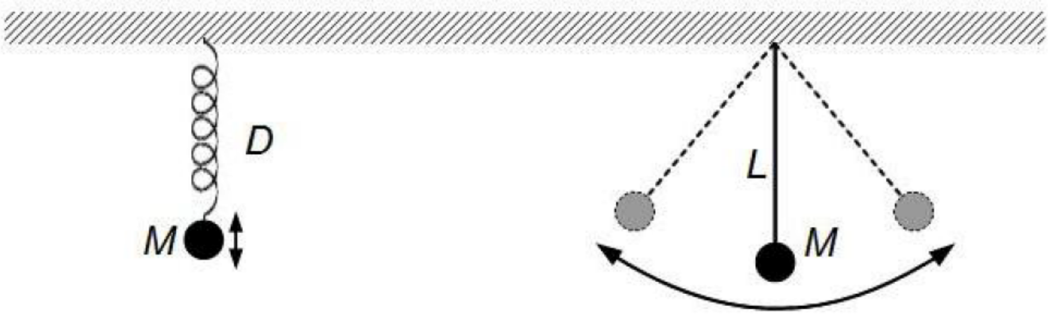
a.) Um welchen Faktor verringert sich die Amplitude pro Periode?

b.) Um welchen Anteil verringert sich die Energie pro Periode ?

c.) Geben Sie die Güte des Oszillators an und schätzen Sie die Anzahl Schwingungen ab, welche dieser macht bevor seine Energie auf 1/e abgefallen ist?

Aufgabe 2 *(Träges Pendel)*

Ein Federpendel mit Federkonstante D und ein Fadenpendel mit einem masselosen Faden der Länge L sollen synchronisiert werden. Beide Kugeln haben dieselbe Masse M.



a.) Stellen Sie die Differenzialgleichung für das Federpendel auf. Lösen Sie diese durch Ansatz einer Cosinusfunktion und geben Sie die Kreisfrequenz ω der Schwingung an.

b.) Wie lautet die Kreisfrequenz ω für das Fadenpendel mit Punktmasse im Schwerefeld mit Erdbeschleunigung g (in Kleinwinkelnäherung)?

c.) Welche Fadenlänge muss bei gegebener Federkonstante D gewählt werden, damit die Kreisfrequenzen gleich sind?

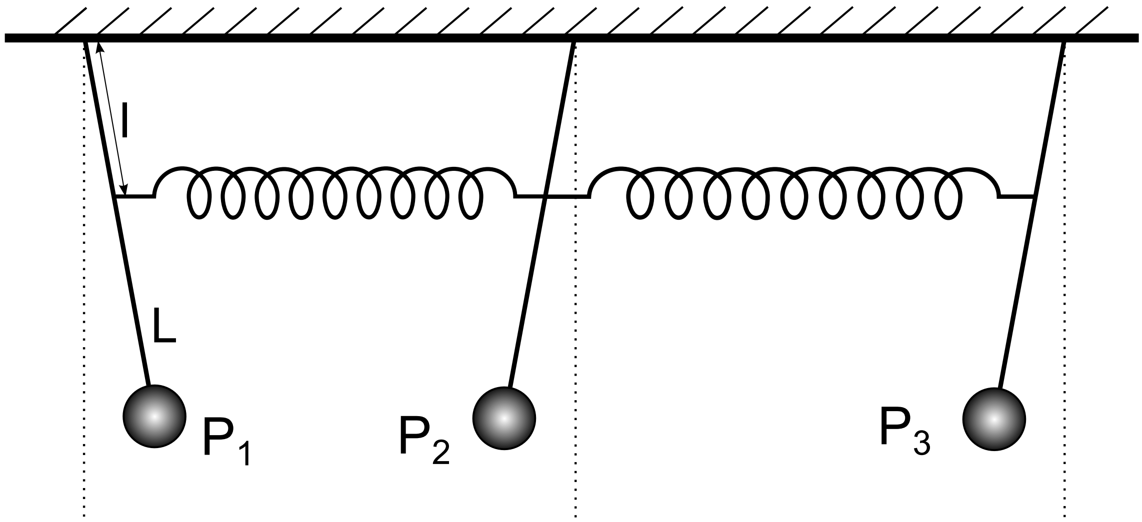
d.) Betrachten wir nun die gleiche Situation für Kugeln mit endlichem Radius R. Wie ändert sich dadurch die Kreisfrequenz des Federpendels ?

e.) Bei welchem Kugelradius schwingt das Fadenpendel bei gleicher Fadenlänge (bis zum Mittelpunkt der Kugel) um 1 Prozent langsamer als das Federpendel?

(Hinweis: Die Kreisfrequenz des physikalischen Pendels ist $\omega = \sqrt{\frac{Mgd_s}{I}}$ wobei d_s der Abstand des Aufhängepunkts vom Schwerpunkt und I das Trägheitsmoment bezüglich des Aufhängepunkts ist. Das Trägheitsmoment einer homogenen Vollkugel beträgt $I_K = \frac{2}{5}MR^2$).

Aufgabe 3 *(Gekoppeltes Pendel)*

Drei identische mathematische Pendel der Länge L und Masse m werden in einer Reihe angeordnet. Die benachbarten Pendel werden jeweils durch masselose Federn mit der Federkonstante k gekoppelt. Die Federn sind jeweils Abstand l zum Aufhängepunkt angebracht. Berechnen Sie die Eigenfrequenzen und geben Sie die Eigenschwingungen an. Verwenden Sie für die ganze Aufgabe die Kleinwinkelnäherung.



a.) Stellen Sie die drei gekoppelten Differentialgleichungen für die einzelnen Pendel auf. Die Auslenkung aus der Gleichgewichtslage sei jeweils ϕ_ν, mit $\nu \in [1, 2, 3]$. Beachten Sie hierfür für jedes einzelne Pendel den Einfluss der Gravitation sowie die Wechselwirkung über die angehängte(n) Feder(n).

b.) Stellen Sie Differentialgleichungen in Matrixschreibweise $\ddot{\vec{\phi}} = \underline{A}\,\vec{\phi}$ dar.
Führen Sie hierzu die folgenden Konstanten ein:

$$\omega_0^2 := \frac{g}{L}$$

$$\kappa := \frac{kl^2}{mL^2}$$

Die einzelnen Einträge der Matrix $\underline{A}$ lassen sich als Linearkombination der neuen Konstanten ω_0^2 und κ darstellen.

c.) Verwenden Sie den Ansatz $\phi_\nu = \hat{\phi}_\nu e^{i\omega t}$ und setzen Sie diesen in die Gleichung ein. Durch Umstellen erhalten Sie eine Gleichung folgender Art:

$$\vec{0} = \underline{B}\vec{\hat{\phi}}$$

Aufgabe 4 *(Getriebener, harmonischer Oszillator)*

Ein harmonischer Oszillator (HO) ist gegeben, wenn auf eine Masse m eine rückstellende Kraft $F = -kx$ entgegengesetzt zur Auslenkung wirkt. Beim gedämpften, getriebenen HO wirkt zusätzlich Reibung, welche proportional zur Geschwindigkeit ist $F = -b\dot{x}$ sowie eine periodische Kraft mit Frequenz ω, welche den HO antreibt.

a.) Leiten Sie aus diesen Annahmen die Differentialgleichung für einen getriebenen harmonischen Oszillator her. Tipp: Um später einen komplexen Lösungsansatz verwenden zu können, müssen Sie auch die antreibende Kraft komplex formulieren.

b.) Nutzen Sie den Ansatz $x = A(w)\mathrm{e}^{i(wt+\varphi)}$ um die Differentialgleichung zu lösen und finden Sie einen Ausdruck für $A(\omega)$ und $\varphi(\omega)$.

c.) Geben Sie eine Formel für die Resonanzfrequenz an.