Aufgabenblatt 6

Übungen E1 – Mechanik WS 2017/2018

Dozent: Prof. Dr. Hermann Gaub
Übungsleitung: Dr. Martin Benoit und Dr. Res Jöhr

Verständnisfragen

i.) Was unterscheidet einen elastischen von einem inelastischen Stoß? Welche Größen sind dabei erhalten?

ii.) Was sagt die spezielle Relativitätstheorie über die Größe $(ct)^2 - x^2$ aus?

iii.) Ein Raumschiff bewegt sich mit halber Lichtgeschwindigkeit von der Erde weg. Es sieht vor sich ein weiteres Raumschiff, das in gleicher Richtung ebenfalls mit halber Lichtgeschwindigkeit relativ zum ersten Raumschiff fliegt. Gemäß der Lorenztransformation addieren sich Geschwindigkeiten wie folgt:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

- Wie schnell fliegt das zweite Raumschiff von unserem Sonnensystem aus beobachtet?
- Zeigen Sie dass, wenn im ersten Raumschiff die Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Laserstrahls gemessen wird, das Experiment vom Bezugssystem der Erde aus zum gleichen Ergebnis führt.

Aufgabe 1 *(PSR B1919+21)*

Der Pulsar PSR B1919+21 ist der erste entdeckte Pulsar. Zunächst nehmen wir ihn in Bezug auf die Position der Sonne als ruhend an. Dieser Pulsar strahlt Lichtblitze im regelmäßigen Abstand von $\Delta t = 1{,}33730\text{s}$ ab. Ein Lichtblitz benötigt für die Entfernung x zwischen Pulsar und Sonne natürlich die Zeit $t = x/c$ (Lichtgeschwindigkeit c). Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass der Pulsar in der Rotationsebene der Erdumlaufbahn um die Sonne (Ekliptik) liegt, dann kommen die Lichtpulse im Frühling in geringfügig größerem Abstand als im Herbst auf der Erde an.
Um den minimalen und maximalen zeitlichen Abstand zweier aufeinanderfolgender Lichtblitze im Verlauf des Jahres zu bestimmen, nehmen wir an, dass die Erde sich mit einer mittleren Geschwindigkeit von $v_E = 30\text{km/s}$ auf ihrer Umlaufbahn bewegt.
Klassisch gerechnet verkürzt sich diese Laufzeit im Frühling bei Annäherung der Erde an den Pulsar maximal zu: $t' = x/(c + v_E)$ und somit ist

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{t'}{t} = \frac{x/(c + v_E)}{x/c} = \frac{c}{c + v_E}$$

Dies ergibt die nichtrelativistische Version des Doppler-Effekts

$$\Delta t' = \Delta t \frac{c}{c + v_E} = \frac{3 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^5 + 30} 1{,}33730 s = 1,33717 s$$

und bei Entfernung der Erde vom Pulsar verlängert sich das Intervall auf maximal:

$$\Delta t' = \Delta t \frac{c}{c - v_E} = 1,33743s$$

a) Nun bewege sich der Pulsar mit $v_P = c/2$ auf die Sonne zu. Was ist nun der zeitliche Abstand zweier Lichtblitze, wenn nichtrelativistisch gerechnet wird? (da $c/2 \gg v_E$ können Sie annehmen, dass die Erde ruht.)

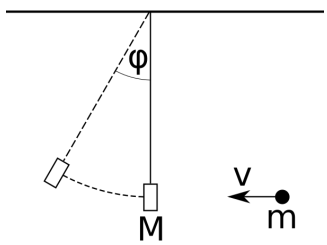
b) Wiederholen Sie die Rechnung aus a), diesmal jedoch relativistisch.

   i.) Welche Zeit t vergeht im Ruhesystem des Pulsars, bis der Lichtblitz die Erde erreicht?

   ii.) Welche Zeit t' vergeht dabei im System der Erde? Hinweis: Achten Sie auf das Vorzeichen von v_P!

   iii.) Verwenden Sie nun, dass die Laufzeiten t und t' aus i) und ii) sich genau so zueinander verhalten, wie die Abstände der Lichtblitze Δt und $\Delta t'$, um $\Delta t'$ zu bestimmen.

Aufgabe 2 *(Pendel als Target)*



Der Körper eines ballistischen Pendels habe die Masse $M = 1\,\mathrm{kg}$. Die Pendellänge beträgt $L = 1\,\mathrm{m}$, die Masse des Pendelarms kann dabei vernachlässigt werden. Auf den Körper des Pendels wird horizontal eine Kugel mit der Geschwindigkeit $v = 100\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ und der Masse $m = 10\,\mathrm{g}$ geschossen. Wie groß ist die Winkelauslenkung für die drei folgenden Fälle?

a) Die Kugel bleibt im Pendelkörper stecken.

b) Die Kugel prallt mit der Geschwindigkeit $v' = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ entgegen der ursprünglichen Flugrichtung ab.

c) Die Kugel fällt nach dem Aufprall senkrecht nach unten.

Aufgabe 3 *(Streuwinkel)*

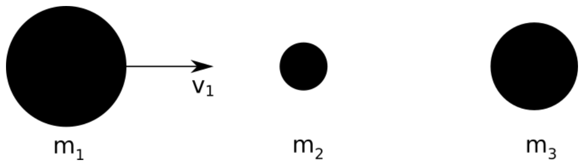
Ein Teilchen mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 stoße mit einem ruhenden Teilchen zusammen und werde um den Winkel φ abgelenkt. Seine Geschwindigkeit nach dem Stoß sei v. Das zweite Teilchen werde gestreut, wobei seine Geschwindigkeit den Winkel ϑ mit der Anfangsrichtung des ersten Teilchens bildet.

a) Verwenden Sie die Impulserhaltung, um zu zeigen, dass sowohl für einen elastischen als auch für einen unelastischen Stoß gilt:

$$\tan\vartheta = \frac{v\sin\varphi}{v_0 - v\cos\varphi}$$

b) Zeigen Sie, dass im Spezialfall eines elastischen Stoßes und gleicher Massen der beiden Teilchen $\varphi + \vartheta = 90°$ gilt. (Hinweis: verwenden sie hier die Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen)

Aufgabe 4 *(Zentraler Stoß ungleicher Massen)*



Drei Kugeln sind auf einer horizontalen Geraden hintereinander angeordnet. Die Massen der ersten und dritten Kugel betragen m_1 und m_3. Die zweite und dritte Kugel sind anfangs in Ruhe. Die erste Kugel erhält eine Geschwindigkeit v_1 und stößt zentral und elastisch auf die zweite Kugel, diese wiederum macht danach einen zentralen elastischen Stoß mit der dritten Kugel.

a) Wie groß muss die Masse m_2 sein, damit die Energie der dritten Kugel nach dem Stoß maximal wird? *Tipp: Betrachten Sie zunächst den ersten Stoß und danach den zweiten. Finden Sie das Maximum von v_3 bezüglich m_2. Kontrollergebnis: $m_2 = \sqrt{m_1 m_3}$. Als Zwischenergebnis sollten Sie für einen elastischen zentralen Stoß zwischen Stoßpartnern a und b, bei dem b in Ruhe ist, erhalten:*

$$\frac{E_b}{E_a} = \frac{4x}{(1+x)^2} \quad \text{mit } x := \frac{m_b}{m_a}.$$

b) Berechnen Sie unter der Bedingung von Teil a) die Energie der dritten Kugel.

c) Vergleichen Sie das in Teil b) erhaltene Ergebnis mit der Energieübertragung beim direkten zentralen elastischen Stoß der ersten mit der dritten Kugel, d.h. also ohne die Kugel mit der Masse m_2. In welchem Fall ist die übertragene Energie größer?

Rechnen Sie erst allgemein, bevor Sie die Zahlenwerte $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$, $m_3 = 3\,\mathrm{kg}$ und $v_1 = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ einsetzen!