Aufgabenblatt 7

Übungen E1 – Mechanik WS 2017/2018

Dozent: Prof. Dr. Hermann Gaub
Übungsleitung: Dr. Martin Benoit und Dr. Res Jöhr

Verständnisfragen

i.) Nicht zentraler Stoß: Wie verhält sich der Streuwinkel, wenn der Stoßparameter verkleinert wird?

ii.) Pro Sekunde verliert die Sonne $4{,}3 \times 10^6$ t ihrer Masse. Würde die Sonne auch an Masse verlieren, wenn wir annehmen sie würde ausschließlich Licht (also masselose Photonen) ausstrahlen?

iii.) Was wäre geschehen, wenn die Garnrolle aus Aufgabe 4 andersherum auf den Boden gefallen wäre?

Aufgabe 1 *(Inverse Lorentz-Transformation)*

Die Lorentz-Transforation zwischen den Raumzeitpunkten $\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$ im System S und $\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$ im System S' kann in Matrixschreibweise wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \hat{L} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} \text{ mit } \hat{L} = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma \end{pmatrix} \text{ und } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Dabei ist v die Relativgeschwindigkeit zwischen den beiden Systemen.

(a) Zeigen Sie, dass die inverse Transformation von S' nach S durch $\hat{L}(-v)$ gegeben ist.

(b) Aus der Photosphäre der Sonne wird ein Elektron mit der Ruhemasse $m_0 = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg und einer relativistischen Energie von $E = 1{,}6 \times 10^{-13}$ J zu einem Beobachter auf der Erde im Abstand von $D = 150 \times 10^6$ km emittiert. Berechnen Sie die Flugzeit aus Sicht des Erdbeobachters.

Aufgabe 2 *(Relativistische Energie)*

a) Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit eines Teilchens mit der Ruhemasse m_0 und der relativistischen Gesamtenergie E durch $\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{(m_0 c^2)^2}{E^2}}$ gegeben ist

b) Für den Fall, dass $E >> m_0 c^2$ kann die Formel aus Teilaufgabe (a) mittels einer Taylor-Entwicklung genähert werden. Die Taylor-Entwicklung einer Funktion $f(x)$ an der Stelle a ist gegeben durch die Formel:

$$Tf(x;a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3 + \ldots$$

(wobei $f^{(n)}$ die „n$-$*te*“ Ableitung der Funktion $f(x)$ nach x darstellt; $f''(a)$ stellt demnach die 2-Ableitung an der Stelle a dar.) Für unsere Näherung entwickeln wir die Funktion $f(x) = \sqrt{1-x}$ als Taylorreihe um den Punkt $a = 0$. Berechnen Sie damit die ersten beiden Terme der Taylor-Entwicklung der Funktion aus Teilaufgabe (a) um die Geschwindigkeit v in „erster Näherung“ zu bestimmen.

c) Berechnen Sie die Geschwindigkeit eines Elektrons mit einer kinetischen Energie von 0,51 MeV.

Aufgabe 3 *(Relativistische Stöße)*

An Teilchenbeschleunigern rund um den Globus erforschen Teilchenphysiker die elementaren Grundbausteine der Materie. Sie beschleunigen unterschiedliche Teilchen auf hohe Energien und bringen diese durch zentralen Stoß exact zur Kollision, um die Stoßprodukte mit verschiedensten Detektoren zu untersuchen und zu klassifizieren. In unserem Beispiel lassen wir ein Elektron e^- und dessen Antiteilchen, das Positron e^+, kollidieren. Treffen ein Elektron und ein Positron aufeinander, dann annihilieren sie sich. Dabei entsteht ein energiereiches Teilchen X als Zwichenzustand, das nach sehr kurzer Zeit wieder zerfällt:

$$e^+ + e^- \to X \to A + B + ...$$

Im Experiment wollen die Teilchenphysiker erreichen, dass als Zwischenzustand ein Teilchen mit einer möglichst grossen Masse entsteht, damit es in möglichst interessante Endprodukte zerfallen kann. (*Hinweis*: Benutzen Sie die Erhaltungssätze für relativistische Energie und Impuls. Die Massen von Elektron und Positron sind gleich: $m_e = 511\,\mathrm{keV\,c^{-2}}$. Mit Masse ist generell immer die „Ruhemasse“ gemeint.)

a) Betrachten Sie zur Vereinfachung den Fall, dass ein bewegtes Elektron mit einem ruhenden Positron kollidiert. Berechnen Sie für diesen Fall die Geschwindigkeit, mit der sich das Zwischenprodukt nach dem Stoß bewegt in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v_1 bzw. γ_1.

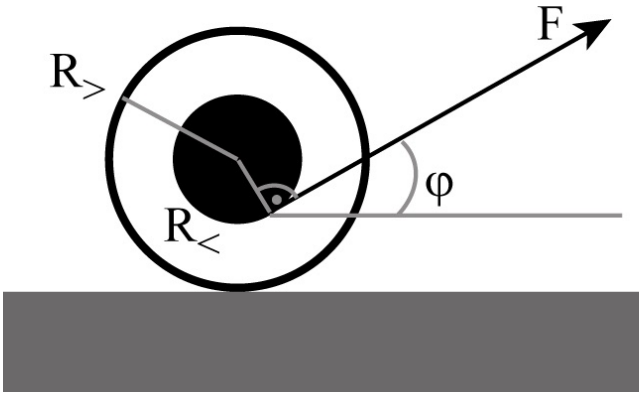
b) Zeigen Sie allgemein, dass die Masse des Zwischenzustandes immer grösser oder gleich der Massensumme der beiden reagierenden Teilchen ist. Betrachten Sie dazu wieder den vereinfachten Fall und beweisen Sie die Gleichung:

$$m_X = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\gamma_1}$$

c) Berechnen Sie die kinetische Energie, mit der man Positronen auf ruhende Elektronen schiessen muss, damit der Zwichenzustand eine Masse von $90\,\mathrm{GeV\,c^{-2}}$ hat. Verwenden Sie dazu die Gleichung aus Teil a).

d) In einem sog. Speicherring kreisen Elektronen und Positronen derselben Energie in entgegengesetzter Richtung und werden an bestimmten Punkten zur Kollision gebracht. Berechnen Sie die kinetische Energie, auf die man Elektronen und Positronen in einem Speichering beschleunigen muss, damit der bei der Kollision entstehende Zwischenzustand auch eine Masse von $90\,\mathrm{GeV\,c^{-2}}$ hat.

Aufgabe 4 *(Garnrolle)*



Beim Stricken (auch Physiker müssen sich mal etwas entspannen. . .) ist Ihnen eine Garnrolle (äußerer Radius $R_>$, innerer „Fadenabwickelradius“ $R_<$) auf den Boden gefallen und ein Stück weit gerollt. Sie wollen Sie an dem Faden, den Sie noch in der Hand halten zu sich ziehen und müssen feststellen, dass sich die Garnrolle nur immer weiter abrollt. Entnervt lassen Sie den Faden auf den Boden fallen, wo Ihre Katze Ihnen zur Hilfe eilt – auch sie zieht an dem Faden, nur diesmal wickelt sich die Garnrolle dabei auf. Ihr physikalischer Verstand schaltet sich nun doch ein und Sie stellen fest, dass die Richtung, in die sich die Garnrolle dreht davon abhängt, in welchem Winkel ϕ man am Faden zieht. Nun wollen Sie es genauer wissen:

a) Bestimmen Sie, für welche Winkel ϕ zwischen Faden und Boden sich die Rolle im bzw. gegen den Uhrzeigersinn dreht. Was ist der Grenzwinkel ϕ_g, an dem sich die Rolle gerade nicht dreht?

b) Sie ziehen die Garnrolle zu sich hin. Berechnen Sie die Beschleunigung der Rolle, wenn Sie im Winkel ϕ mit der Kraft F am Faden ziehen.

c) Berechnen Sie das Drehmoment M, welches auf die Garnrolle wirkt.