

Aufgabenblatt 9

Übungen E1 – Mechanik WS 2017/2018

Dozent: Prof. Dr. Hermann Gaub

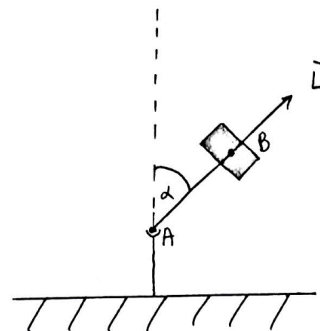
Übungsleitung: Dr. Martin Benoit und Dr. Res Jöhr

Verständnisfragen

- i.) Was verstehen Sie unter der Präzession eines Kreisels?
- ii.) Was wird als Nutation bezeichnet und wann tritt diese auf?
- iii.) Welche Rotationen von starren Körpern werden als stabil bezeichnet?
- iv.) Wie ändert sich die Präzessionswinkelgeschwindigkeit Ω aus Aufgabe 1 für $\alpha < 90^\circ$?

Aufgabe 1 (Präzession eines Gyroskops)

Ein Gyroskop besteht aus einer Scheibe ($m = 0,3\text{ kg}$, $I = 0,01\text{ kg m}^2$), die um eine Drehachse ω durch den Mittelpunkt der Scheibe rotiert. Der Abstand der Scheibe vom Lagerpunkt A sei $b = 20\text{ cm}$. Die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe ist $\omega = 150\text{ rad s}^{-1}$. Der Winkel zwischen der Drehachse ω und der Senkrechten ist α .



- a) Wenn das Gyroskop mit einer Neigung $\alpha = 90^\circ$ gestartet wird, ändert die Drehachse ω kontinuierlich ihre Richtung. Diese Bewegung nennt man Präzession. Die Präzessionswinkelgeschwindigkeit Ω ist definiert als die Winkelgeschwindigkeit, mit der ω und damit auch der Drehimpuls \mathbf{L} seine Richtung ändert. Wir wählen auf Grund der beobachteten Präzession folgenden Ansatz:

$$\mathbf{L} = |L| \begin{pmatrix} \cos \Omega t \\ \sin \Omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie damit $d\mathbf{L}/dt$.

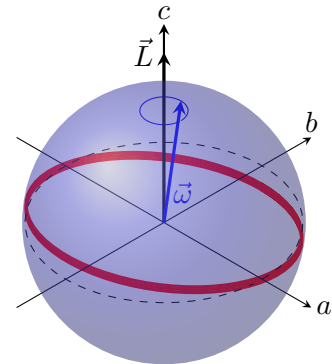
- b) Allgemein gilt $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M}$. \mathbf{M} ist hier das Drehmoment, das aus der Gravitationskraft der Scheibe um den Lagerpunkt A resultiert (die Achse ist masselos). Berechnen Sie \mathbf{M} für $\alpha = 90^\circ$.
- c) Berechnen Sie nun aus Kombination der Ergebnisse aus a) und b) die Präzessionswinkelgeschwindigkeit Ω für die Fälle in denen sich der Kreisel mit Winkelgeschwindigkeiten von $\omega = 150\text{ rad s}^{-1}$ resp. $\omega = 6\text{ rad s}^{-1}$ dreht.
Wieso ist eines der beiden Resultate physikalisch nicht sinnvoll (welches)?

Aufgabe 2 (Weltklimagipfel)

Die Eiskappen an den Polen enthalten jeweils etwa $1,2 \times 10^{19}$ kg Eis. Diese Masse trägt so gut wie nichts zu dem Trägheitsmoment der Erde bei, da sie sich sehr nahe an der Drehachse befindet. Schätzen Sie ab, wie sich die Länge eines Tages änderte, wenn die Polkappen abschmelzen und sich dieses Wasser gleichmäßig über die Erdoberfläche (Kugelschale mit $r_E = 6370$ km) verteilt. Hinweis: Der Einfluss der Polkappenschmelzung auf die Erhöhung des Meeresspiegel hängt vom Pol ab.

Aufgabe 3 (Chandler Wobble)

Durch ihre Rotation ist die Erde keine perfekte Kugel, sondern am Äquator leicht abgeplattet. Das Trägheitsmoment um die Nord-Süd-Achse ist deshalb größer als das Trägheitsmoment um eine Achse durch den Äquator. Der Drehimpulsvektor und der Vektor der Winkelgeschwindigkeit schließen dabei einen Winkel von etwa $0,3''$ ein. Dadurch vollführt die Erde eine Nutationsbewegung.



Berechnen Sie die Periodendauer dieses sogenannten Chandler Wobbles. Nehmen Sie dazu an, dass die Erde aus einem kugelsymmetrischen Teil mit Radius $r = 6370$ km und Trägheitsmoment $I = 9,70 \times 10^{37}$ kg m² sowie einem Ring um den Äquator mit Masse $m = 1,60 \times 10^{22}$ kg bestehe.

Aufgabe 4 (Würfelkontraktion)

Betrachten Sie ein würfelförmiges Stück eines elastischen Materials mit einem Elastizitätsmodul von $E = 20$ MPa und der Querkontraktionszahl $\mu = 0,45$. Die Kanten des Würfels haben die Länge $l = 2$ cm und sind parallel zu den Achsen eines kartesischen Koordinatensystems ausgerichtet.

- Es wirken nun Schubkräfte der Größe $F_x = 200$ N, $F_y = 500$ N und $F_z = 1000$ N senkrecht auf die entsprechenden Würfelflächen. Dabei soll insgesamt Kräftegleichgewicht herrschen, sodass der Würfel nur deformiert, aber nicht beschleunigt wird. Wie groß sind die Längenänderungen Δl_x , Δl_y und Δl_z wenn man davon ausgeht, dass sich die Effekte der einzelnen Kräfte linear überlagern?
- Welche Kräfte müssen auf die Würfelflächen wirken, um in z -Richtung die vorgegebene Kontraktion $\Delta l_z = -2$ mm ohne gleichzeitige Ausdehnungen in x - und y -Richtung zu erhalten?