Ludwig–Maximilians–Universität München – Fakultät für Physik

E1 – Mechanik

WS 2017 / 2018

Lösungen zu Übungsblatt 2

Prof. Dr. Hermann Gaub, Dr. Martin Benoit und Dr. Res Jöhr

Verständnisfragen

(a) Im Folgenden bezeichnen wir die Länge des Weges von A nach B mit s. Für die Zeit, die der Fußgänger von A nach B gebraucht hat, gilt:

$$t_{AB} = \frac{s}{v_{AB}} \ . \tag{1}$$

Für die von B nach A benötigte Zeit gilt analog:

$$t_{BA} = \frac{s}{v_{BA}} \ . \tag{2}$$

Die mittlere skalare Geschwindigkeit $\langle v \rangle$ ist definiert als die gesamte zurückgelegte Strecke dividiert durch die dafür benötigte Gesamtzeit:

$$\langle v \rangle = \frac{2s}{t_{AB} + t_{BA}} = \frac{2s}{s\left(\frac{1}{v_{AB}} + \frac{1}{v_{BA}}\right)} = \frac{2v_{AB}v_{BA}}{v_{AB} + v_{BA}} = 3,75 \text{ m/s} \ . \tag{3}$$

Für die mittlere vektorielle Geschwindigkeit gilt:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}}{t_{AB} + t_{BA}} = \frac{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}}{t_{AB} + t_{BA}} = \vec{0} \text{ m/s} \ . \tag{4}$$

(b) Die Geschwindigkeit ist die Steigung der Weg-Zeit-Kurve. Die Beschleunigung ist die Rate, mit der sich die Geschwindigkeit und somit die Steigung der Weg-Zeit-Kurve ändert. Die *Geschwindigkeit* ist:

(i) bei t_0 und t_1 negativ

(ii) bei $t_3,\ t_4,\ t_6$ und t_7 positiv

(iii) bei t_2 und t_5 null.

Die Beschleunigung ist dort positiv, wo die Steigung der Weg-Zeit-Kurve mit zunehmender Zeit zunimmt. Also ist die *Beschleunigung*:

(i) bei t_4 negativ

(ii) bei t_2 und t_6 positiv

(iii) bei $t_0,\ t_1,\ t_3,\ t_5$ und t_7 null.

(c) Die Beschleunigung des Balls ist (ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands) konstant. Wir wählen ein Koordinatensystem, in dem der Abwurfpunkt der Ursprung ist und die positive y-Richtung nach oben zeigt. Die Verschiebung des Balls auf halber Höhe ist $\Delta y = \Delta y_{max}/2$. Die Gleichung für die Geschwindigkeit bei konstanter Beschleunigung verknüpft die Anfangs- und die Momentangeschwindigkeit mit der erreichten Verschiebung: $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta y = v_0^2 - 2g\Delta y$. Weil im Scheitelpunkt $v = 0$ ist, erreicht der Ball die maximale Höhe

$$\Delta y_{max} = -\frac{v_0^2}{2\,(-g)} = \frac{v_0^2}{2g} \ . \tag{5}$$

Damit gilt für das Quadrat der Geschwindigkeit auf halber Höhe

$$v^2 = v_0^2 - 2g\Delta y = v_0^2 - 2g\frac{\Delta y_{max}}{2} = v_0^2 - g\Delta y_m ax = v_0^2 - g\frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2} \ . \tag{6}$$

Daraus folgt $v = \frac{1}{\sqrt{2}}v_0 \approx 0,707v_0$, und (c) ist richtig.

(d) Der Affe wird getroffen wenn der Abschusswinkel so gewählt wird, dass auf den sitzenden Affen gezielt wird:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\text{Höhe des Affen}}{\text{Distanz des Schützen zum Baum}}\right) \ . \tag{7}$$

Man bemerke dass die Abschussgeschwindigkeit im Ausdruck für den Abschusswinkel nicht vorkommt. Ob die Geschwindigkeit nun also das zwei oder dreifache der Ursprünglichen beträgt, spielt daher keine Rolle. Der Affe wird sowieso getroffen.

Aufgabe 1 Kollision

<u>Kurze Lösung:</u>

Der Betrag an kinetischer Energie, der beim Bremsen in andere Energieformen umgewandelt wird beträgt $E_1 = \frac{m}{2}v_1^2$, wobei m die Masse des Autos bezeichnet. Im Fall, dass das Auto anfänglich die Geschwindigkeit v_2 besitzt, beträgt seine restliche kinetische Energie also

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) \tag{8}$$

und seine Geschwindigkeit

$$\frac{m}{2}v^2 = \Delta E \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{v_2^2 - v_1^2} \ . \tag{9}$$

Für die angegebenen numerischen Werte erhalten wir eine Restgeschwindigkeit von $v =$ 30 km/h mit der das Auto auf das Hindernis prallt.

<u>Lange Lösung:</u>

Für eine konstant beschleunigte geradlinige Bewegung gilt im Allgemeinen:

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0 \ , \tag{10}$$

$$v(t) = at + v_0 \ , \tag{11}$$

wobei $s(t)$ der in der Zeit t zurückgelegte Weg ist, und in unserem Fall $a < 0$ die konstante Beschleunigung ist, und $s_0 = 0$ gilt.
Für die Fahrt mit der Geschwindigkeit v_1 gilt dann:

$$s_1 = \frac{1}{2}at_1^2 + v_1 t_1 \ , \tag{12}$$

$$0 = at_1 + v_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = -\frac{v_1}{a} \ . \tag{13}$$

Also gilt:

$$s_1 = \frac{a}{2}\left(-\frac{v_1}{a}\right)^2 + v_1\left(-\frac{v_1}{a}\right) = \frac{v_1^2}{2a} - \frac{v_1^2}{a} = -\frac{v_1^2}{2a} \ . \tag{14}$$

Für die Fahrt mit der Geschwindigkeit v_2 gilt analog:

$$s_2 = \frac{1}{2}at_2^2 + v_2 t_2 \ , \tag{15}$$

$$v = at_2 + v_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{v - v_2}{a} \ . \tag{16}$$

Also gilt:

$$s_2 = \frac{a}{2}\left(\frac{v - v_2}{a}\right)^2 + v_2\left(\frac{v - v_2}{a}\right) = \frac{v^2 - 2vv_2 + v_2^2}{2a} + \frac{vv_2 - v_2^2}{a} = \frac{v^2 - v_2^2}{2a} \ . \tag{17}$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{v_2^2 + 2as_2} \ . \tag{18}$$

Da der Autofahrer in beiden Fällen exakt am selben Ort zu bremsen begonnen hätte, sind die zurückgelegten Wege gleich:

$$s_1 = s_2 := s \ . \tag{19}$$

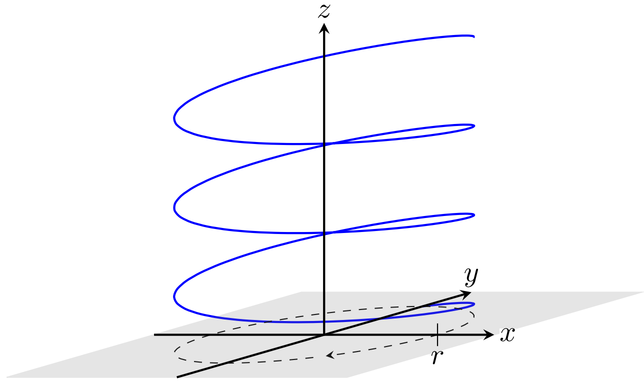
Es folgt:

$$v = \sqrt{v_2^2 + 2a\left(-\frac{v_1^2}{2a}\right)} = \sqrt{v_2^2 - v_1^2} \ . \tag{20}$$

Aufgabe 2 Überlagerte Kreisbewegung

Ein Elektron beschreibt in einem homogenen Magnetfeld folgende Bahnkurve:

$$\vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} r\sin(\omega t) \\ r\cos(\omega t) \\ v_z t + z_0 \end{pmatrix}$$



(b) $\vec{v}\,(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} r\omega\cos(\omega t) \\ -r\omega\sin(\omega t) \\ v_z \end{pmatrix}$

$\|\vec{v}\,(t)\| = \sqrt{r^2\omega^2\cos^2(\omega t) + r^2\omega^2\sin^2(\omega t) + v_z^2} = \sqrt{r^2\omega^2 + v_z^2}$

(c) $\vec{a}\,(t) = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} = \begin{pmatrix} -r\omega^2\sin(\omega t) \\ -r\omega^2\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$

$\|\vec{a}\,(t)\| = \sqrt{r^2\omega^4\sin^2(\omega t) + r^2\omega^4\cos^2(\omega t)} = r\omega^2$

(d) Es liegt keine Beschleunigungskomponente in z-Richtung vor, in xy-Richtung liegt eine Kreisbewegung mit Normalbeschleunigung vor.

Aufgabe 3 Elfmeter

(a) Im Folgenden bezeichnen wir die Höhe des Tores mit $h = 2,44$ m und dessen Breite mit $b = 7,32$ m. Die Elfmeterdistanz nennen wir d. Wir berechnen zunächst die Zeit, die der Ball benötigt, um im oberen linken Toreck im Scheitel seiner Flugbahn anzukommen:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 0,705 \text{ s} . \tag{21}$$

(b) Aus der Bedingung, dass sich der Ball im Toreck im Scheitel seiner Flugbahn befinden soll, lässt sich die notwendige vertikale Anfangsgeschwindigkeit v_{vert} bestimmen:

$$v_{\text{vert}} = gt \overset{\text{(a)}}{=} \sqrt{2gh} . \tag{22}$$

Für die vom Ball horizontal zurückgelegte Entfernung s gilt:

$$s = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + d^2} . \tag{23}$$

Damit gilt für die horizontale Komponente der Anfangsgeschwindigkeit v_{horiz}:

$$v_{\text{horiz}} = \frac{s}{t} = \frac{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + d^2}}{\sqrt{\frac{2h}{g}}} = \sqrt{\frac{g}{2h}\left(\left(\frac{b}{2}\right)^2 + d^2\right)} . \tag{24}$$

Somit gilt für den Betrag der Anfangsgeschwindigkeit:

$$v_0 = \sqrt{v_{\text{vert}}^2 + v_{\text{horiz}}^2} = \sqrt{2gh + \frac{g}{2h}\left(\left(\frac{b}{2}\right)^2 + d^2\right)} \approx 17,83 \text{ m/s} . \tag{25}$$

(c) Wir nennen den Winkel in der Spielfeldebene ϕ und den Anstiegswinkel θ. Es gilt:

$$\tan\phi = \frac{b/2}{d} \quad \Rightarrow \quad \phi = \arctan\left(\frac{b}{2d}\right) \approx 0,321 \approx 18,4^\circ , \tag{26}$$

$$v_{\text{horiz}} = v_0\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{v_{\text{horiz}}}{v_0}\right) \approx 0,398 \approx 22,8^\circ . \tag{27}$$

(d) Für den vom Ball horizontal zurückgelegten Weg s gilt:

$$s = v_0 \cos\theta \cdot t \ , \tag{28}$$

wobei $t = 0,5$ s die Reaktionszeit des Torwarts ist.

Für den vertikal zurückgelegten Weg gilt:

$$h = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \ . \tag{29}$$

Wir formen die zwei obigen Gleichungen um:

$$\begin{aligned} v_0 \sin\theta \cdot t &= h + \frac{g \cdot t^2}{2} \\ v_0 \cos\theta \cdot t &= s \ , \end{aligned} \tag{30}$$

und teilen die erste durch die zweite. Somit erhalten wir:

$$\tan\theta = \frac{1}{s}\left(h + \frac{gt^2}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \theta = \arctan\left(\frac{1}{s}\left(h + \frac{gt^2}{2}\right)\right) \approx 0,306 \approx 17,5^\circ \ . \tag{31}$$

Damit folgt:

$$v_0 = \frac{s}{\cos\theta \cdot t} \approx 24,3 \text{ m/s} \ . \tag{32}$$

Aufgabe 4 Kreisbewegung

(a) Es gilt:

$$f = \frac{1}{T} \ , \tag{33}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{v}{2\pi R} \ . \tag{34}$$

Für die auf m wirkende Zentripetalkraft F_Z gilt:

$$F_Z = \frac{mv^2}{R} \ . \tag{35}$$

Für die auf M wirkende Gravitationskraft gilt:

$$F_g = Mg \ . \tag{36}$$

$$F_Z \stackrel{!}{=} F_g \quad \Leftrightarrow \quad mv^2 = MgR \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{MgR}{m}} \tag{37}$$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Mg}{mR}} \ . \tag{38}$$

(b) Die auf m wirkende Gravitationskraft $F_{g,m}$ und Normalkraft N gleichen sich gegenseitig aus. Für die Gesamtkraft, die auf m wirkt, gilt dann:

$$F_{ges,m} = F_T = ma \ , \tag{39}$$

wobei a die gesuchte Beschleunigung und F_T die Seilkraft ist.

Da das Seil sich nicht dehnt und die Seilkräfte bei m und bei M betragsmäßig gleich sind, gilt für die auf M wirkende Gesamtkraft:

$$F_{ges,M} = -Ma = F_T - F_{g,M} = F_T - Mg \ , \tag{40}$$

wobei $F_{g,M}$ die auf M wirkende Gravitationskraft ist.

Damit gilt:

$$-Ma = ma - Mg \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{M}{M+m} g \ . \tag{41}$$