LUDWIG–MAXIMILIANS–UNIVERSITÄT MÜNCHEN – FAKULTÄT FÜR PHYSIK

E1 – Mechanik

WS 2017 / 2018

Übungsblatt 3 - Lösung

Prof. Dr. Hermann Gaub, Dr. Martin Benoit und Dr. Res Jöhr

Verständnisfragen

i.) Raketengleichung:

a.) Die Endgeschwindigkeit ist durch die Ausstossgeschwindigkeit des Treibstoffes sowie das Verhältnis von Anfangsmasse $m(t_0)$ und Endmasse $m(t_{end})$ (Nutzlast) bestimmt.

b.) Mehrstufige Raketen haben den Vorteil, dass durch das Abwerfen der ausgebrannten Stufen die Endmasse verkleinert wird. Somit kann die Rakete höhere Geschwindigkeiten erreichen oder auch mehr Nutzlast transportieren.

c.) In der Nähe des Äquators. Durch die Erdrotation hat die Rakete dort bereits die auf der Erdoberfläche maximal vermittelte Grundgeschwindigkeit und muss weniger beschleunigen, um insgesamt auf die im Orbit notwendige Geschwindigkeit zu kommen.

ii.) Nein, denn München liegt auf einem Punkt auf der Erde welcher nicht um den Erdschwerpunkt kreist sondern um einen Punkt auf der Erdachse der weit nördlich davon liegt. Aus diesem Grund können sich Zentrifugalkraft und Gravitationskraft nicht gegenseitig aufheben da. Geostationäre Satelliten können also nur auf einem Punkt über dem Äquator installiert werden.

iii.) Damit der Drehimpuls (r^2) anfänglich möglichst groß ist und die Kreiselbewegung möglichst lang anhält. Durch Anlegen der Gliedmaßen können sie dann die Rotationsgeschwindigkeit noch erhöhen.

Aufgabe 1 Schleuderschnur

a.) Drehmoment bei der Beschleunigung:

$$|\vec{M}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = rma = mr^2\alpha = 0.5kg \cdot 1m^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{5}{3}s^{-2} = 5.24\frac{kg \cdot m^2}{s^2}$$

wobei $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 2\pi\frac{5}{3}s^{-2}$ die Winkelbeschleunigung ist.
Drehimpuls (für $\omega = const$):

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = rmv = m\omega r^2 = 0.5kg \cdot 2\pi \cdot 5s^{-1} \cdot 1m^2 = 15.71\frac{kg \cdot m^2}{s}$$

b.) Es wirkt die Zentripetalkraft

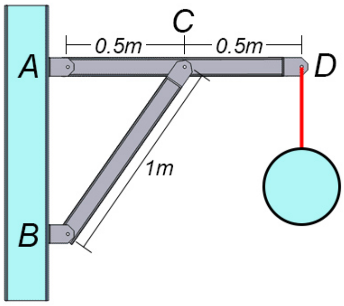
$$F_z = m(2\pi\nu)^2 r = 0.5kg \cdot (10\pi)^2 s^{-2} \cdot 1m = 493,5N$$

c.) Drehimpulserhaltung mit $r_1 = 1m$ und $r_2 = 0.4m$:

$$L_1 = L_2 \Rightarrow m\omega_1 r_1^2 = m\omega_2 r_2^2 \Rightarrow \omega_2 = (2\pi\nu)\frac{r_1^2}{r_2^2} = 196,35s^{-1}, \nu = 31.25s^{-1}$$

mit $v = \omega \cdot r \Rightarrow v_2 = \omega_2 \cdot r_2 = 78.54m/s$
Ja, die Energie wird erhöht, da Arbeit am System durch Fadenziehen verrichtet wurde.

Aufgabe 2 Gasthaus Kugel



Gemäss Aufgabenstellung sind die Kräfte gesucht, welche die Stangen an den Stellen A und B auf die Wand ausüben. Da wir zur Berechnung jeweils die äusseren Drehmomente und Kräfte betrachten, werden wir in der Formulierung der Lösung nur die äusseren Kräfte, also diese welche die Wand an den Stangen ausübt, verwenden und die gesuchten Kräfte aus dem actio reactio Prinzip ableiten.
Betrachtet man die Anordnung, so wird schnell klar, dass nicht nur ein Kräftegleichgewicht sondern auch ein Drehmomentgleichgewicht herrscht, aus welchem sich die gesuchten Kräfte berechnen lassen. Dazu betrachtet man zunächst die Stange AD und wählt einen Bezugspunkt auf der Stange für die Drehmomente aus. Es bietet sich an, hierfür den Punkt C auszuwählen, da so die Kraft $\vec{F}_C$, wegen des verschwindenden Hebelarms, nicht zum Drehmoment beiträgt. Die Summe der äußeren Drehmomente ist dann im Gleichgewicht.

$$\vec{\tau}_C \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{r}_{CA} \times \vec{F}_A + \vec{r}_{CD} \times \vec{F}_D = 0 \tag{1}$$

Einsetzen ergibt

$$0 = \begin{pmatrix} -0.5m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -100N \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\Rightarrow \qquad -0.5m \cdot F_{Ay} - 0.5m \cdot 100N = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_{Ay} = -100N \tag{3}$$

Für die Berechnung von F_{Ax} betrachten wir das System aus den Stangen AD und BC und wählen B als Bezugspunkt für die Drehmomente. Dadurch trägt F_B nicht zum Drehmoment bei. Die 'äußeren' Drehmomente, die an dem System angreifen, stammen von $\vec{F}_A$ und $\vec{F}_D$ und es gilt:

$$\vec{\tau}_B \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \vec{r}_{BA} \times \vec{F}_A + \vec{r}_{BD} \times \vec{F}_D = 0 \tag{4}$$

Für r_{BA} und r_{BD} verwenden wir, dass AB die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge $1m$ ist; daher ist der Abstand AB gleich $0.5 \cdot \sqrt{3}m = 0.866m$ ist. Damit ergibt sich

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.866m \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0.866m \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -100N \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\Rightarrow \qquad -0.866m \cdot F_{Ax} - 1m \cdot 100N = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_{Ax} = -115,5N \tag{6}$$

Wir bleiben bei der Betrachtung der Stangen AD und BC als System und verwenden, dass die Summe aller von außen an den Stangen angreifenden Kräfte Null sein muss (Kräftegleichgewicht). F_C kommt hier nicht vor, da diese für das gewählte System eine 'innere' Kraft ist. Es gilt also

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_D = 0 \tag{7}$$

$$\vec{F}_B = \begin{pmatrix} 115.5N \\ 200N \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Die jeweiligen Kräfte $\vec{K}_A$ und $\vec{K}_B$, welche die Stangen auf die Wand ausüben, folgen dann direkt aus dem Prinzip actio reactio. Es gilt

$$\vec{K}_A = -\vec{F}_A = \begin{pmatrix} 115.5N \\ 100N \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{K}_B = -\vec{F}_B = \begin{pmatrix} -115.5N \\ -200N \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Die Kräfte können auch durch die Wahl anderer geeigneter Bezugspunkte für die Drehmomente bestimmt werden.

Aufgabe 3 Galaxienmasse Für die Bewegung der Erde um die Sonne gilt

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Gmm_s}{r^2}$$

Wobei r die Distanz zwischen Erde und Sonne, v die Geschwindigkeit der Erde und m und m_s die Massen von Erde und Sonne bezeichnen. Die Bewegung der Sonne um das Zentrum der Galaxis wird beschrieben durch die Gleichung

$$\frac{m_s V^2}{R} = \frac{Gm_s M}{R^2}$$

Wobei R die Distanz von der Sonne bis zum Zentrum der Milchstraße, V die Geschwindigkeit der Sonne und M die Masse der Milchstraße bezeichnet. Es folgt

$$M = \frac{RV^2}{G} = \frac{RV^2}{rv^2} \cdot m_s$$

Indem man benutzt, dass $V = 2\pi R/T$ und $v = 2\pi r/t$, wobei T und t die Drehperioden der Sonne und der Erde sind, erhält man

$$M = \left(\frac{R}{r}\right)^3 \left(\frac{t}{T}\right)^2 \cdot m_s = 1.53 \cdot 10^{11} m_s$$

Aufgabe 4 Geostationärer Satellit Gleichgewicht zwischen Zentrifugalkraft und Gravitationskraft für stabile Umlaufbahn

$$\Rightarrow m\omega^2 r = G_N \cdot \frac{m \cdot M_E}{r^2} \Rightarrow r = \left(\frac{G_N M_E}{\omega^2}\right)^{1/3}$$

Die Höhe h über dem Äquator $h := r - R_E$ ist damit

$$h = \left(\frac{G_N M_E}{\omega^2}\right)^{1/3} - R_E$$

Geostationär heißt: $\omega = \omega_E = \frac{2\pi}{T_E}$ mit $T_E = 1d = 86400s :\Rightarrow \omega_E \approx 7.272 \cdot 10^{-5} s^{-1}$. Zusammen mit $M_E = 5.98 \cdot 10^{24} kg$ und $R_E = 6378 km$ sowie $G_N = 6.672 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$

$$\Rightarrow h \approx 35877 km$$