Lösungen Aufgabenblatt 4

Übungen E1 – Mechanik WS 2017/2018

Dozent: Prof. Dr. Hermann Gaub
Übungsleitung: Dr. Martin Benoit und Dr. Res Jöhr

Verständnisfragen

i.) Alle Bergsteiger leisten gleich viel Arbeit. Das Integral ist wegunabhänig da es sich um ein konservatives Kraftfeld handelt!

ii.) Nein. Die Kugel würde runterfallen. Es ist eine Mindestgeschwindigkeit nötig, welche die Bedingung $F_Z = F_G$ erfüllt.

iii.) Der Skifahrer verrichtet keine physikalische Arbeit, da er schlussendlich keinen Weg zurückgelgt hat. Der Wanderer hingegen verichtet die Arbeit $\Delta W_W = mg\Delta h$. Die Leistung der beiden hingegen ist beim Bergsteigen gleich: $\Delta P_W = \Delta P_S = \frac{mg\Delta h}{t}$ (die Ski werden zur Gesamtmasse dazugerechnet). Das Skifahren könnte man vereinfacht als Leistungsfrei betrachten. (Wenn der Skifahrer seine gewonnene kinetische Energie verpuffen lässt und nicht z.B. ins' Stromnetz einspeist o.ä. - da würde er sogar Leistung herausbekommen, andererseits je nach Abfahrtstechnik und eventuellen Ziehwegen wo er ggF. anschieben muss braucht er evtl. sogar Leistung).

Aufgabe 1 *(Freier Fall / Galilei-Transformation)*

a.) Galilei Transformation:

$$x_B = x_A; \qquad y_B = y_A; \qquad z_B = z_A + \frac{1}{2}gt^2 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{B} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A + \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$$

b.) Die im System B wirkende Kraft ist

$$\frac{d^2\vec{B}}{dt^2}m = \dot{\vec{F}} = \begin{pmatrix} \dfrac{d^2x_A}{dt^2} \\ \dfrac{d^2y_A}{dt^2} \\ \dfrac{d^2z_A}{dt^2} + g \end{pmatrix} m.$$

Da die Beschreibung eines frei fallenden Massepunktes im System A durch $z_A(t) = z_{A,0} - 1/2gt^2$ gegeben ist, folgt $\frac{d^2z_A}{dt^2} = -g$ und somit $\frac{d^2z_B}{dt^2} = 0$. Man empfindet im frei fallenden System also keine Schwerkraft.

Aufgabe 2 *(Energiesatz)*

$m = 1\,\mathrm{kg}$, $r = 1\,\mathrm{m}$, $\omega = 120\,\mathrm{s}^{-1}$, $g = 10\,\mathrm{m\,s}^{-2}$.

a.) $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\omega r)^2 = 7200\,\mathrm{J}$

b.) $E_{pot} = mgh = 2mgr = 19{,}62\,\mathrm{J}$
$E_{pot} = \Delta E_{kin} = \frac{1}{2}mr^2(\omega_2^2 - \omega_1^2) \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{2\Delta E_{kin}}{mr^2} + \omega_1^2} = 120{,}16\,\mathrm{s}^{-1}$
$\Delta\omega = \sqrt{\frac{2\Delta E_{kin}}{mr^2} + \omega_1^2} - \omega_1 = 0{,}163\,\mathrm{s}^{-1}$

Aufgabe 3 *(E-Lok)*

$P = 4{,}5\,\mathrm{MW}, v_1 = 18\,\mathrm{km\,h}^{-1} = 5\,\mathrm{m\,s}^{-1}, v_2 = 90\,\mathrm{km\,h}^{-1} = 25\,\mathrm{m\,s}^{-1}, t = 3\,\mathrm{min} = 180\,\mathrm{s}$.

a.) $P = \mathrm{d}W/\,\mathrm{d}t = \vec{F}\cdot\vec{v} = F\cdot v$, da Kraft und Geschwindigkeit parallel sind.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 2P/m\,\mathrm{d}t = 2v\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}(v^2) \qquad (*)\\
&\Rightarrow F = P/v = m\cdot dv/dt\\
&\Rightarrow \int_{v_1^2}^{v_2^2}\mathrm{d}(v^2) = m\int_t^{t+\Delta t} 2P/m\,\mathrm{d}t\\
&\Rightarrow v_2^2 - v_1^2 = 2P/m\cdot\Delta t\\
&\Rightarrow m = 2P\cdot\frac{\Delta t}{v_2^2 - v_1^2} \approx 2{,}7\times10^6\,\mathrm{kg}\widehat{=}2700\,\mathrm{t}
\end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg:
$P = \Delta E_{kin}/\Delta t$ und $\Delta E_{kin} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$. $\Rightarrow P = \frac{1}{2}mv^2/\Delta t \to m = 2P\Delta t/(v_2^2 - v_1^2)$

b.) Aus (*) folgt: $v^2 - v_1^2 = 2\frac{P}{m}t \Rightarrow v(t) = \sqrt{\frac{2P}{m}t + v_1^2}$
Mit $F = P/v$ folgt: $F(t) = \frac{P}{\sqrt{\frac{2P}{m}t + v_1^2}}$

c.) Mit $v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2P}{m}t + v_1^2}$ folgt: $\mathrm{d}s = \sqrt{\frac{2P}{m}t + v_1^2}\,\mathrm{d}t$

$$\Rightarrow s(\Delta t) = \int_0^{\Delta t}\sqrt{\frac{2P}{m}t + v_1^2}\,\mathrm{d}t = \frac{m}{3P}\left[\left(\sqrt{\frac{2P}{m}\Delta t + v_1^2}\right)^3 - v_1^3\right]$$
$$\Rightarrow s(\Delta t) = \frac{2}{10}\left[\left(\sqrt{\frac{10}{3}\Delta t + 25}\right)^3 - 125\right] = 3100\,\mathrm{m}$$

d.) Die zusätzlich in z-Richtung benötigte Leistung beträgt

$$\begin{aligned}
P_z &= \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E_{pot}}{\mathrm{d}t} = mg\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = mg\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = mg\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}v\\
&= 2{,}7\times10^6\cdot10\cdot25\cdot0{,}02\,\mathrm{W} = 13{,}5\,\mathrm{MW} > 4{,}5\,\mathrm{MW}
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir verwendet, dass $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s} = \frac{2}{100}$. Die Lok schafft es folglich <u>nicht</u>, die Geschwindigkeit zu halten!

Aufgabe 4 *(Das Roche - Limit)*

a.) Wir behandeln die Körper als Massepunkte. Aus dem Kräftegleichgewicht $F_{G,P} = F_Z$ folgt

$$F_{G,P}(d_{PM}) = \frac{M_P M_M G}{d_{PM}^2} = \frac{M_M v^2}{d_{PM}} = F_Z(d_{PM}). \tag{1}$$

Unter Verwendung von $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{d_{PM}}$ folgt

$$\frac{M_P M_M G}{d_{PM}^2} = M_M \omega^2 d_{PM} \qquad \Leftrightarrow \qquad T^2 = \frac{4\pi^2 d_{PM}^3}{G M_P} \Rightarrow T = \frac{2\pi d_{PM}\sqrt{d_{PM}}}{\sqrt{G M_P}}$$

Alternativ kann man die Aufgabe auch als Zweikörperproblem behandeln (Keplersche Gesetze): $F_z = \frac{4\pi^2}{T^2}\mu d_{PM}$ führt mit gleichem Ansatz und $\mu = \frac{M_P M_M}{M_P + M_M}$ auf

$$T = \frac{2\pi d_{PM}\sqrt{d_{PM}}}{\sqrt{G(M_M + M_P)}} \backsimeq \frac{2\pi d_{PM}\sqrt{d_{PM}}}{\sqrt{G M_P}} \tag{2}$$

b.) Die zusätzliche Kraft ΔF, die auf die Probemasse m wirkt, ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\Delta F &= F_Z(d_{PM} + R_M) - F_Z(d_{PM}) - (F_{G,P}(d_{PM} + R_M) - F_{G,P}(d_{PM}))\\ &\overset{eq.\ 1}{=} F_Z(d_{PM} + R_M) - F_{G,P}(d_{PM} + R_M) = m\omega^2(d_{PM} + R_m) - \frac{m M_P G}{(d_{PM} + R_m)^2}\\ &\overset{eq.\ 2}{=} m M_P G\left(\frac{(d_{PM} + R_M)}{d_{PM}^3} - \frac{1}{(d_{PM} + R_M)^2}\right).\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck muss nun noch mit Hilfe des Hinweises vereinfacht werden.

$$\begin{aligned}\frac{\Delta F}{m M_P G} &= \frac{(d_{PM} + R_M)}{d_{PM}^3} - \frac{1}{(d_{PM} + R_M)^2} = \frac{(d_{PM} + R_M)^3 - d_{PM}^3}{d_{PM}^3(d_{PM}^2 + 2 d_{PM} R_M + R_M^2)}\\ &\backsimeq \frac{d_{PM}^3 + 3 d_{PM}^2 R_M - d_{PM}^3}{d_{PM}^5 + 2 d_{PM}^4 R_M} \backsimeq \frac{3 R_M}{d_{PM}^3}\end{aligned}$$

Wobei im letzten Schritt $R_M << d_{PM}$ angenommen wurde und Terme höherer Ordnung von R_M vernachlässigt wurden. Damit ergibt sich als Ausdruck für die Kraft

$$\Delta F \backsimeq 3\frac{m M_P G R_M}{d_{PM}^3} \tag{3}$$

c.) Der Mond bleibt stabil, falls $F_{G,M} \geq \Delta F$. Das Roche Limit ist also gerade im Kräftegleichgewicht erfüllt.

$$\frac{3 m M_P G R_M}{d_r^3} = \frac{m M_M G}{R_M^2} \qquad \Rightarrow \qquad d_r^3 = 3 R_M^3 \frac{M_P}{M_M} \qquad \Rightarrow \qquad d_r = R_M \left(3\frac{M_P}{M_M}\right)^{(1/3)}$$

Unter Verwendung der Relation von Dichte und Volumen ergibt sich

$$d_r = R_P\left(3\frac{\rho_P}{\rho_M}\right)^{(1/3)}. \tag{4}$$

d.) Das Roche-Limit hat Erklärungspotential für die Entstehung der Saturn-Ringe. Desweiteren lässt sich mit ihm eine Aussage über die Dichte des Gesteins der Saturnringe machen. So gilt für Monde (Gestein) mit $\rho_M > 3\rho_P$, dass das Roche-Limit kleiner als der Radius des Planeten ist, der Mond also stabil ist.

Nebenbemerkung: Bei der Aufgabenstellung wurde ein von dem Planeten abgewandter Massepunkt betrachtet. Die genäherte Lösung impliziert, dass die Kräfte symmetrisch sind. Das also ein Massepunkt, welcher auf der dem Planeten zugewandten Seite ist, die gleiche Kraft verspürt. In Wirklichkeit sind die Kräfte dort aber höher als auf der Aussenseite. Eine Analoge Herleitung des Roche Limits, welche diese Situation betrachtet ist auf Wikipedia zu finden, führt aber aufgrund der Näherungen auf das gleiche Ergebnis. Außerdem würden Masseteilchen von der abgewandten Seite in den Weltraum wegfliegen, während solche von der Zugewandten Seite einen Ring um den Planeten bilden würden.