Ludwig–Maximilians–Universität München – Fakultät für Physik

E1 – Mechanik

WS 2017 / 2018

Lösungen zu Übungsblatt 5

Prof. Dr. Hermann Gaub, Dr. Martin Benoit und Dr. Res Jöhr

Verständnisfragen

(i.) Sie drehen im Uhrzeigersinn (genau anders herum als bei uns auf der Nordhalbkugel)

(ii.) Das jeweils ruhende Myon ßähe"das bewegte Myon länger leben-wenn's nicht vorher schon zerfallen würde... Da alle Inertialsysteme gleichberechtigt sind lebt in Wirklichkeit keines länger oder kürzer aber je nach Inertialsystem des Betrachters tut es das eine oder andere oder (im Schwerpunktsystem) keines...

(iii.) In keine Richtung da die Corioliskraft genau lotrecht wirkt.

(iv.) ob ursächliche Zusammenhänge möglich sind erfährt man durch Einzeichnen des 45^o Lichtkegels in jedes der Ereignisse. Ereignisse die innerhalb des Kegels eines Ereignisses liegen können von diesem beeinflusst sein: A⇒B, B⇒ ?, C⇒B, D⇒C&B

Aufgabe 1 Scheinkräfte

In dieser Aufgabe geht es um die Bewegung eines Körpers relativ zu einem rotierenden Bezugssystem (die Erde). Daher ist es am einfachsten, wenn man die Rotation des Bezugssystems ignoriert und zwei Scheinkräfte einführt, nämlich die Zentrifugalkraft

$$\vec{F}_z = m\vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})$$

und die Corioliskraft

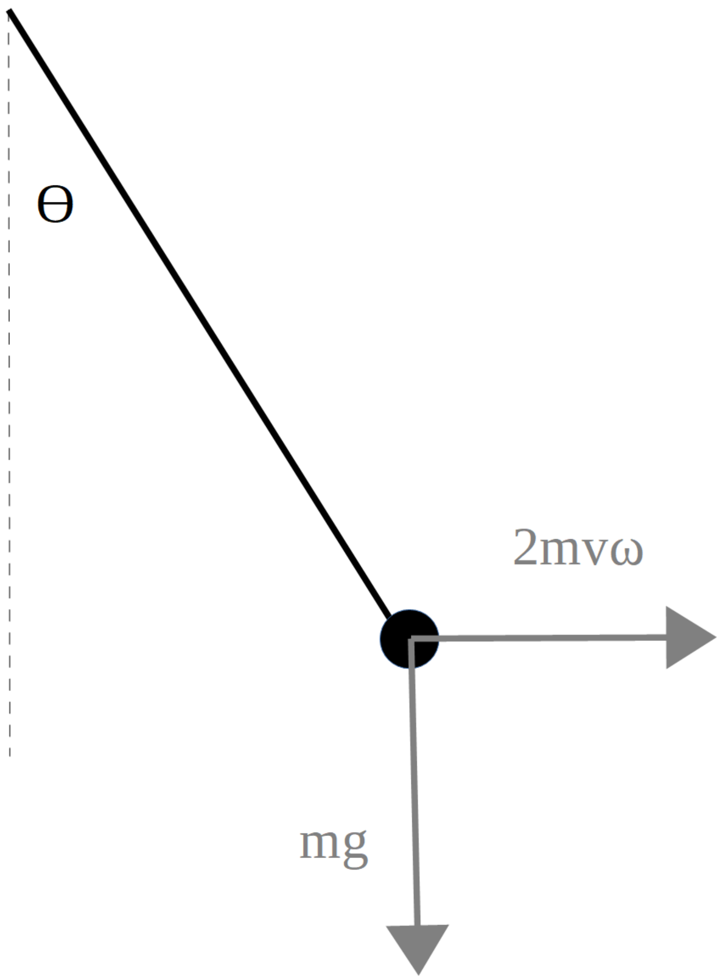
$$\vec{F}_c = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}$$

Hier ist m die Masse der Körpers, v seine Geschwindigkeit relativ zum rotierenden Bezugssystem und r sein Ortsvektor relativ zur Rotationsachse. ω ist die Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Bezugssystems.

a) Am Nordpol fliegt das Flugzeug senkrecht zur Rotationsachse der Erde (die durch den Nordpol nach oben zeigt). Der Ortsvektor $\vec{r}$ ist parallel zu $\vec{\omega}$, somit gilt:

$$\vec{F}_z \sim (\vec{r} \times \vec{\omega}) = 0 \Leftrightarrow \vec{F}_z = 0$$

Der Resultierende Vektor aus $(\vec{v} \times \vec{\omega})$ hat hingegen den Betrag $v \cdot \omega$ und ist (aus Sicht eines Flugzeugpassagieres der nach vorne schaut) nach rechts gerichtet. Somit ist auch $\vec{F}_c$ nach rechts gerichtet und der Faden wird nach rechts abgelenkt. Um die Ablenkung zu berechnen, hilft folgende Skizze:

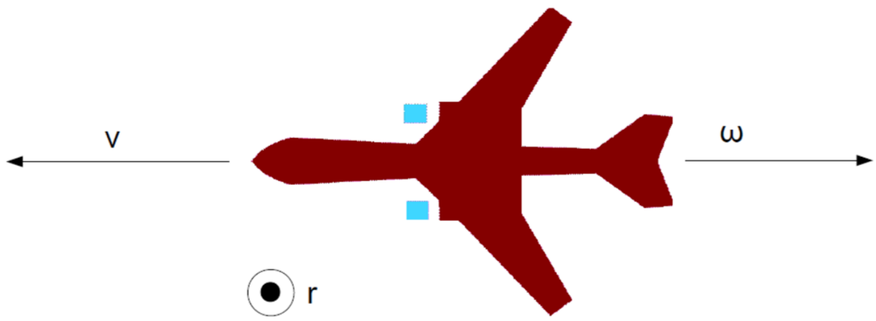


Daraus wird ersichtlich, dass der gesuchte Winkel θ zwischen Erdachse und Faden durch folgende Relation gefunden werden kann:

$$tan(\theta) = \frac{2mv\omega}{mg} = \frac{2v\omega}{g} = 3.7 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \theta_a = 0.21°$$

mit $v = 900$ km/h und $\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} s^{-1}$

b) Wenn das Flugzeug nun Richtung Süden über den Äquator fliegt, ist der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ dem Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ entgegengesetzt. Der Ortsvektor $\vec{r}$ zeigt nun aus der Ebene heraus und hat den Betrag R, also den Erdradius.



Aus

$$(\vec{v} \times \vec{\omega}) = \vec{0}$$

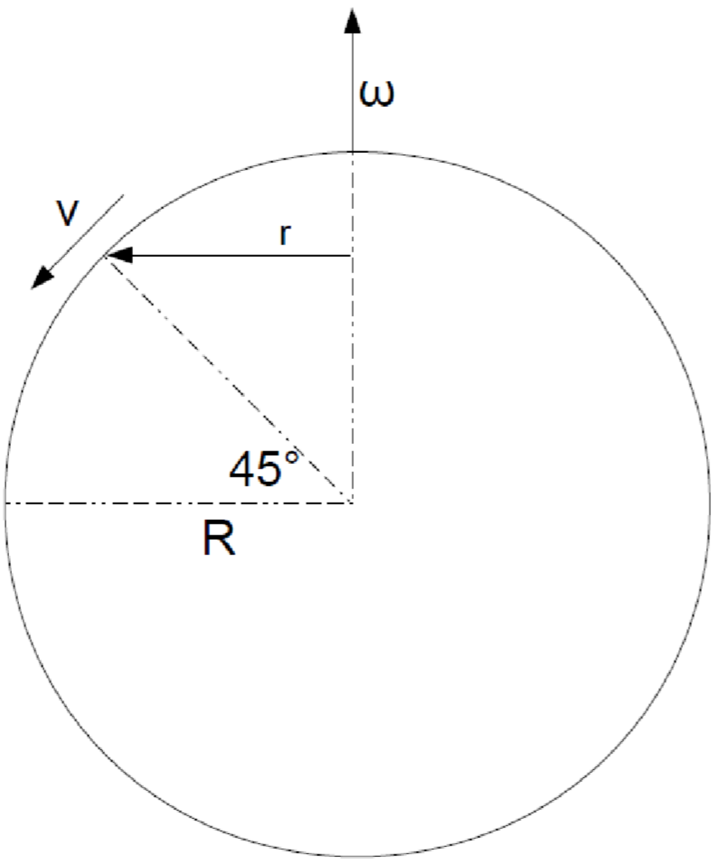
folgt

$$\vec{F}_c = \vec{0}$$

und da die Zentrifugalkraft $\vec{F}_z$ vertikal nach oben wirkt (Rechte-Hand-Regel), gibt es keine seitliche Kraftkomponente auf die Schnur. Somit beträgt die Auslenkung

$$\theta_b = 0°.$$

c) Wenn das Flugzeug den 45.Breitengrad Richtung Süden überfliegt, ist es einfach, die Scheinkräfte relativ zur Erde zu visualisieren:



Der Vektor $(\vec{v} \times \vec{\omega})$ zeigt in die Zeichenebene und hat den Betrag $\frac{v\omega}{\sqrt{2}}$. Daher hat die Corioliskraft auf die Masse m einen Betrag von $\sqrt{2}mv\omega$ und zeigt rechts relativ zur Flugrichtung. Der Vektor $(\vec{r} \times \vec{\omega}$ zeigt in die Zeichenebene und hat den Betrag $\frac{R\omega}{\sqrt{2}}$. Daraus folgt für die Zentrifugalkraft:

$$|\vec{F}_z| = F_z = \frac{mR\omega^2}{\sqrt{2}}$$

Die Richtung ist 45 Grad über der Horizontalen. Die Masse m wird nach vorne (wegen der Zentrifugalkraft) und nach rechts (wegen der Corioliskraft) abgelenkt, also in südwestliche Richtung.
Die Zentrifugalkraft kann daher in eine Komponente $\frac{mR\omega^2}{2}$ in die Richtung nach vorne und in eine Komponente $\frac{mR\omega^2}{2}$ nach oben aufgeteilt werden. Dann kann die Ablenkung genauso berechnet werden wie in a). Die Auswirkung der Zentrifugalkraft ist, dass sie die Erdbeschleunigung um den Wert $\frac{R\omega^2}{2}$ reduziert, also (mit $g = 9.81\frac{m}{s^2}$)

$$g' = g - \frac{R\omega^2}{2} = 9.79\frac{m}{s^2}$$

Daher ist die Ablenkung nach rechts gegeben durch

$$tan(\theta) = \frac{\sqrt{2}v\omega}{g'} \Rightarrow \theta = 0.15°$$

und die Ablenkung nach vorne:

$$tan(\theta) = \frac{R\omega^2}{2g'} \Rightarrow \theta = 0.10°$$

Kombiniert man diese beiden Ergebnisse, so erhält man die gesamte Ablenkung:

$$\theta_c = \sqrt{(0.15^2 + 0.10^2)} = 0.18°$$

in einer Richtung

$$tan^{-1}\left(\frac{0.15}{0.10}\right) = 56°$$

südwestlich.

Aufgabe 2 Myonenzerfall

a) Angenommen, das Myon bewegt sich mit Lichtgeschwindigkeit. Dann ist die zurückgelegte Strecke

$$s = c\tau = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s^2} \cdot 2.2 \cdot 10^{-6} s = 660m$$

Nach klassischer Rechnung würden also praktisch alle Myonen zerfallen, bevor sie die Erdoberfläche erreichen. Die Zählrate an der Erdoberfläche wäre also viel kleiner als die Erzeugungsrate der Myonen.

b) Durch die Zeitdilatation lebt das Myon vom Bezugssystem der Erde aus um den Gamma-Faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(0.9995)^2}} = 31.6$$

länger, also

$$\tau' = \gamma\tau = 31.6 \cdot 2.2 \cdot 10^{-6}s = 69.8\mu s$$

Daher ist die im Bezugssystem der Erde zurückgelegte Strecke

$$s' = c\tau' = 20.9km$$

D.h. ein in 10 km Höhe erzeugtes Myon erreicht mit großer Wahrscheinlichkeit die Erdoberfläche.

c) Wie erklärt sich das Myon, dass es in der Zeit $\tau = 2.2\mu s$ bis zur Erdoberfläche und weiter gelangt, obwohl die Außenwelt an ihm nur mit 99.95% der Lichtgeschwindigkeit vorbeizieht, und es also nur eine Entfernung von ca. 660m schafft? Die Antwort: Die Außenwelt ist für das Myon längenkontrahiert um den Faktor $1/\gamma$. Die d'=10km bis zur Erdoberfläche sind für das Myon nur

$$d = \frac{d'}{\gamma} = \frac{10^4 m}{31.6} = 316m$$

und die 20.9 km bis zu seinem Zerfallsort sind für das Myon genau seine 660m.

Aufgabe 3 künstliche Schwerkraft

Achtung: in der ersten Version war $R = 80m$ und es kam für ω was Krummes raus $(1/\sqrt{8})s^{-1}$

a) Zentrifugalbeschleunigung $a_{Z_f} = \omega^2 R \stackrel{!}{=} g_k$ also $\omega = \sqrt{\frac{g_k}{R}}$. Mit $R = 40m$, $g_k = 10m/s^2$) folgt $\omega = 1/2s^{-1}$.

b) Die Corioliskraft $\vec{v}\times\vec{\omega}$ wirkt garnicht, da die Bewegung exact parallel zur Drehchse verläuft.

c) Nun ist v parallel zu R, also folgt für die Coriolisbeschleunigung: $\vec{a}_C = -2\vec{\omega}\times\vec{v}$ in Zylinderkoordinaten: $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$, $\vec{v} = v\vec{e}_r$ wird daraus:

$$\vec{a}_C = -2\omega r(\vec{e}_z \times \vec{e}_r) = -1\omega r(\vec{e}_\phi) = -1\frac{m}{s^2}(\vec{e}_\phi)$$

die Scheinkraft wirkt also dem Drehsinn entgegen (Minus!) in Richtung der Kreisbahn und hat den Betrag: $1\frac{m}{s^2}$ und ist deutlich spürbar!.

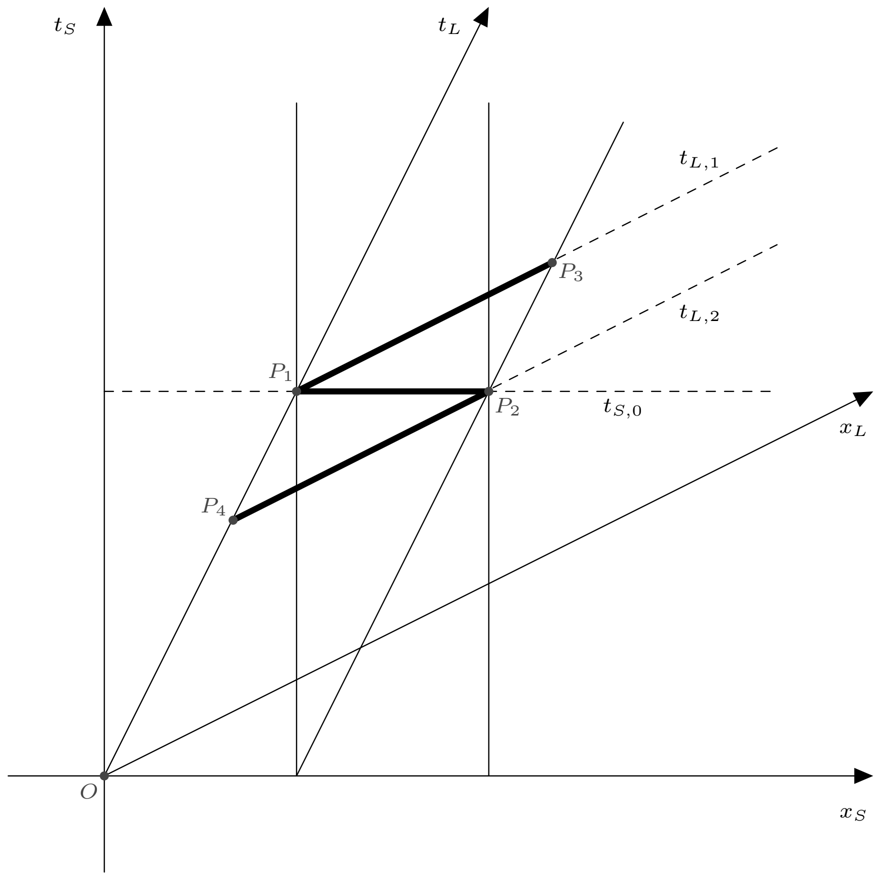
Aufgabe 4

a) die Winkel zwischen der x und x'-Achse sowie der ct und der ct'-Achse errechnet sich aus

$$\tan\varphi = \frac{v}{c} \rightarrow \varphi \approx 35^\circ$$

der Winkel zwischen den Achsen x' und ct' ist dann $90^\circ - 2\varphi = 20^\circ$

b) - e) siehe Grafik (nicht maßstabsgerecht):



f) Jeder Punkt der Leiter durchläuft jeweils eine Weltenlinie, die parallel zur t_L-Achse ist. Die Leiter als Ganzes überdeckt einen ganzen Streifen im Minkowski-Diagramm, der von den Weltenlinien ihrer Enden begrenzt wird. Was ein Beobachter zu einem Zeitpunkt t_0 seiner Zeitkoordinate sieht, ist ein Schnitt durch diesen Streifen bei $t = t_0$. Schnitte konstanter Zeit verlaufen offensichtlich parallel zur x-Achse.

Der Beobachter im System der Scheune sieht zu jedem Zeitpunkt t_S einen horizontalen Schnitt durch den Leiterstreifen, da seine x_S-Achse horizontal ist. Der Beobachter im System der Leiter sieht hingegen zu jedem Zeitpunkt seiner Zeitkoordinate einen geneigten Schnitt, der parallel zur geneigten x_L-Achse seines Koordinatensystems ist.

Die Verbindungsstrecke zwischen P_1 und P_2 ist die Leiter aus der Sicht des Beobachters im Scheunensystem zum Zeitpunkt $t_{S,0}$, als sie gerade in der Scheune ist. Die Verbindungsstrecke zwischen P_1 und P_3 ist die Leiter aus der Sicht des Beobachters im Leitersystem zum Zeitpunkt $t_{L,1}$, als ihr hinteres Ende den Eingang der Scheune passiert. Die Verbindungsstrecke zwischen P_4 und P_2 ist die Leiter aus der Sicht des Beobachters im Leitersystem zum Zeitpunkt $t_{L,2}$, als ihr vorderes Ende den Ausgang der Scheune erreicht. Wie wir sehen, treten P_1 und P_2 aus der Sicht des Scheunensystems gleichzeitig ein, während sie aus der Sicht des Leitersystems zu unterschiedlichen Zeiten eintreten. Aus der Sicht des Leitersystems ist die Leiter also zu keinem Zeitpunkt vollständig in der Scheune.