Lösungen Aufgabenblatt 6

Übungen E1 – Mechanik WS 2017/2018

Dozent: Prof. Dr. Hermann Gaub
Übungsleitung: Dr. Martin Benoit und Dr. Res Jöhr

Verständnisfragen

i.) Bei einem inelastischen Stoß wird kinetische Energie durch plastische Verformung oder Reibungswärme in innere Energie umgewandelt und ist somit in der Energiebilanz nicht mehr sichtbar. Bei einem elastischen Stoß dagegen findet eine solche Umwandlung nicht statt. Es sind folglich sowohl Energie als auch Impuls erhalten, bei einem inelastischen Stoß dagegen nur der Impuls.

ii.) Die Größe $ds^2 = (ct)^2 - x^2$ ist Lorentz-invariant. Das bedeutet, dass sie bei Wechsel des Bezugssystems unverändert bleibt.

iii.)

$$v = \frac{0.5c + 0.5c}{1 + \frac{0.5c \cdot 0.5c}{c^2}} = \frac{4}{5}c = 0.8c$$

$$v = \frac{0.5c + c}{1 + \frac{0.5c \cdot c}{c^2}} = c$$

Man sieht, dass sich Licht in allen Inertialsystemen mit der gleichen Geschwindigkeit bewegt. *Nebenbemerkung: Allerdings wird sich das Licht für die beiden Beobachter in der Wellenlänge unterscheiden.*

Aufgabe 1 *(PSR B1919+21)*

a) Wenn wir nichtrelativistisch rechnen können wir das Ergebnis aus der Aufgabenstellung verwenden und setzen $v_P = c/2$ statt v_E ein.

$$\Delta t' = \Delta t \frac{c}{c + v_P} = \frac{c}{c + c/2} 1{,}337\,30\,\mathrm{s} = 0{,}891\,53\,\mathrm{s}$$

b) i.) Im Ruhesystems des Pulsars gilt allgemein, dass der Lichtblitz einen beliebigen Ort x in seinem System nach der Zeit $t = x/c$ erreicht. Dabei sei nun $x = s + v_E t = ct$ der Ort an dem das Licht die herannahende Erde trifft ($v_E = -c/2$). Somit vergeht für den Pulsar die Zeit $t = s/(c - v_E)$.

ii.) Da wir nun die Erde als ruhend betrachten, verwenden wir die inverse Lorentz-Transformation

$$t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 + v^2/c^2}}$$

und setzen dabei die Koordinaten ($x' = ct'$ und $t' = t'$) für den Event „Auftreffen des Lichtes auf der Erde“ im System des Pulsars ein. Da sich die beiden Systeme aufeinander zubewegen gilt $v = v_P = -c/2$ ist. (Bemerkung: Wir haben hier die Notation geändert und betrachten nun den Pulsar als das „gestrichene System“. Dies soll darauf hinzuweisen, dass sich dieser vom Punkt des Beobachters auf der Erde aus bewegt und dass wir deswegen auch die Inverse Transformation benötigen.)

$$\frac{\Delta t}{\Delta t'} = \frac{t}{t'} = \frac{1 + vx'/(t'c^2)}{\sqrt{1+v^2/c^2}} = \frac{1+v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\sqrt{(1+v/c)^2}}{\sqrt{(1+v/c)(1+v/c)}} = \sqrt{\frac{1+v/c}{1+v/c}}$$

Also ist

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{\frac{1+v_P/c}{1-v_P/c}} = 1{,}337\,30\,\mathrm{s}\sqrt{\frac{1-0{,}5}{1+0{,}5}} = 0{,}7721\,\mathrm{s}$$

Dies ist die relativistische Version des Doppler-Effekts.

Aufgabe 2 *(Pendel als Target)*

Die potentielle Energie beim Maximalausschlag ist:

$$E_{pot} = M'gh = M'gL(1-\cos\phi) = 2LM'g\sin\frac{\phi}{2} \tag{1}$$

Dabei ist M' je nach Fallbetrachtung verschieden. Außerdem gilt nach Energiesatz:

$$\frac{1}{2}mv^2 = E_{pot} + E'_{kin}$$

a) Impulserhaltung $(m+M)v_p = mv \Rightarrow v_p = \frac{m}{m+M}v$ mit v_p als Geschwindigkeit des Pendelkörpers. Damit folgt für die kinetische Energie des Pendelkörpers:

$$E_p = \frac{m+M}{2}v_p^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2}{m+M}v^2$$

Mit $M' = m + M$ folgt aus $E_{pot} = E_p$ in (1):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{m^2}{m+M}v^2 &= 2L(M+m)g\sin^2\frac{\phi}{2}\\ \Rightarrow \sin\frac{\phi}{2} &= \frac{1}{2}\frac{m^2}{m+M}v^2\frac{1}{\sqrt{Lg}} \approx 0.157\\ &\Rightarrow \phi \approx 18{,}01^\circ\end{aligned}$$

b) Mit v' aus Aufgabenstellung lautet die Impulserhaltung: $Mv_p - mv' = mv \Rightarrow v_p = \frac{m}{M}(v+v')$. Damit folgt:

$$E_p = \frac{M}{2}v_p^2 = \frac{m^2}{2M}(v+v')^2$$

Mit $M' = M$ und $E_{pot} = E_p$ in (1) ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{m^2}{2M}(v+v')^2 &= 2LMg\sin^2\frac{\phi}{2}\\ \Rightarrow \sin\frac{\phi}{2} &= \frac{m}{2M}(v+v')\frac{1}{\sqrt{Lg}} \approx 0.174\\ &\Rightarrow \phi \approx 20{,}03^\circ\end{aligned}$$

c) Dies ist ein Spezialfall von b) mit $v' = 0$:

$$\begin{aligned}\sin\frac{\phi}{2} &= \frac{m}{2M} v \frac{1}{\sqrt{Lg}} \approx 0.160 \\ &\Rightarrow \phi \approx 18{,}19^\circ\end{aligned}$$

Aufgabe 3 *(Streuwinkel)*

a) Schreiben wir die Impulserhaltung für den Stoß: $\vec{p}_{1,\text{vor}} = \vec{p}_{1,\text{nach}} + \vec{p}_{2,\text{nach}}$ oder

$$\begin{pmatrix} m_1 v_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 v \cos\varphi \\ m_1 v \sin\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_2 v_2 \cos\vartheta \\ -m_2 v_2 \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

wobei m_1 die Masse des anfangs bewegten Teilchens und m_2 die Masse des anfangs ruhenden Teilchens ist. Bringen wir den ersten Summanden der rechten Seite auf die linke Seite:

$$\begin{pmatrix} m_1 v_0 - m_1 v \cos\varphi \\ -m_1 v \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_2 v_2 \cos\vartheta \\ -m_2 v_2 \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

Nun können wir die Gleichung in der zweiten Komponente durch die Gleichung in der ersten Komponente teilen, sodass die unbekannten Größen m_2 und v_2 gerade herausfallen:

$$-\tan\vartheta = \frac{-m_2 v_2 \sin\vartheta}{m_2 v_2 \cos\vartheta} = \frac{-m_1 v \sin\varphi}{m_1 v_0 - m_1 v \cos\varphi} = \frac{-v \sin\varphi}{v_0 - v\cos\varphi}$$

oder

$$\tan\vartheta = \frac{v \sin\varphi}{v_0 - v\cos\varphi}$$

b) Nun, da der Stoß als elastisch angenommen wird, gilt zusätzlich die Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Außerdem gilt $m_1 = m_2$. Wir können die Gleichungen der Impuls- und Energieerhaltung also vereinfachen:

$$v_0 = v\cos\varphi + v_2 \cos\vartheta \qquad \text{aus der ersten Komponente der Impulserhaltung} \tag{2}$$

$$0 = v\sin\varphi - v_2 \sin\vartheta \qquad \text{aus der zweiten Komponente der Impulserhaltung} \tag{3}$$

$$v_0^2 = v^2 + v_2^2 \qquad \text{aus der Energieerhaltung} \tag{4}$$

Eliminieren wir die Geschwindigkeiten v_2, v_0 und v, um eine Beziehung zwischen den Winkeln zu erhalten. Beginnen wir mit v_2. Aus (3) ist

$$v_2 = v \frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}$$

Eingesetzt in (2) und (4):

$$v_0 = v\left(\cos\varphi + \sin\varphi \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right) \tag{5}$$

$$v_0^2 = v^2 \left(1 + \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\vartheta}\right) \tag{6}$$

Setzen wir v_0 aus (5) in (6) ein, dann fallen alle Geschwindigkeiten heraus und wir erhalten:

$$\left(\cos\varphi + \sin\varphi \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right)^2 = 1 + \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\vartheta}$$

Multiplizieren mit $\sin^2\vartheta$ gibt

$$(\sin\vartheta\cos\varphi + \sin\varphi\cos\vartheta)^2 = \sin^2\vartheta + \sin^2\varphi$$

Daraus ist

$$\begin{aligned}
0 &= (\sin\vartheta\cos\varphi + \sin\varphi\cos\vartheta)^2 - \sin^2\vartheta - \sin^2\varphi \\
&= \sin^2\vartheta\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\vartheta + 2\sin\vartheta\cos\varphi\sin\varphi\cos\vartheta - \sin^2\vartheta - \sin^2\varphi \\
&= \sin^2\vartheta(\cos^2\varphi - 1) + \sin^2\varphi(\cos^2\vartheta - 1) + 2\sin\vartheta\cos\varphi\sin\varphi\cos\vartheta \\
&= -\sin^2\vartheta\sin^2\varphi - \sin^2\varphi\sin^2\vartheta + 2\sin\vartheta\cos\varphi\sin\varphi\cos\vartheta \\
&= -2\sin\vartheta\sin\varphi(\sin\vartheta\sin\varphi - \cos\varphi\cos\vartheta) \\
&= 2\sin\vartheta\sin\varphi\cos(\vartheta + \varphi)
\end{aligned}$$

Falls weder ϑ noch φ Null sind, ist $\cos(\vartheta + \varphi) = 0$ und daraus $\vartheta + \varphi = \pi/2$.

Aufgabe 4 *(Zentraler Stoß ungleicher Massen)*

Nach einem zentralen elastischen Stoß ergeben sich die Geschwindigkeiten v_1', v_2' der Massen m_1, m_2 aus Impuls- und Energieerhaltung gemäß:

$$\begin{aligned}
(i): &\quad m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \\
(ii): &\quad \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \\
(i) \Rightarrow (iii): &\quad m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2) \\
(ii) \Rightarrow (iv): &\quad m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2) \\
(iv)/(iii) \Rightarrow (v): &\quad v_1 + v_1' = v_2' + v_2 \\
m_1 \cdot (v) + (iii): &\quad 2m_1v_1 = (m_1 + m_2)v_2' + (m_1 - m_2)v_2 \\
m_2 \cdot (v) - (iii): &\quad (m_2 - m_1)v_1 + (m_1 + m_2)v_1' = 2m_2v_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_1' &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2 \\
v_2' &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_2
\end{aligned}$$

a) In diesem Fall ist $v_2 = 0$, da m_2 in Ruhe

$$\Rightarrow v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1; \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1$$

Damit ist die Energie der zweiten Kugel:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{m_2v_2'^2}{m_1v_1^2} = \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{4x}{(1 + x)^2}; \quad x := \frac{m_2}{m_1}.$$

Beim Stoß zwischen m_2 und m_3 ist $v_3 = 0$, damit folgt mit $y := m_3/m_2$ analog:

$$\frac{E_3}{E_2} = \frac{4y}{(1 + y)^2}.$$

Zusammengefasst gilt also mit $z := xy = m_3/m_1$:

$$\frac{E_3}{E_1} = \frac{E_2}{E_1} \cdot \frac{E_3}{E_2} = \frac{16xy}{(1+x)^2 \cdot (1+y)^2} = \frac{16z}{(1+x)^2 \cdot (1+\frac{z}{x})^2}.$$

Maximiere E_3/E_1 in Abhängigkeit von x, also $m_2 \Leftrightarrow$ Minimiere den Nenner des Ausdrucks:

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{dx}\left[(1+x)^2 \cdot \left(1+\frac{z}{x}\right)^2\right] = \frac{2(x+1)(x+z)}{x}\left(1-\frac{z}{x^2}\right)$$

Für $x > 0$ liefert nur der letzte Faktor eine Nullstelle, weil alle anderen Faktoren positiv sind. Diese liegt bei:

$$x_{max} = \sqrt{z}.$$

Damit folgt:

$$m_2 = x_{max} \cdot m_1 = \sqrt{z} \cdot m_1 = \sqrt{m_1 m_3} = \sqrt{3}\,\mathrm{kg} \approx 1{,}732\,\mathrm{kg}$$

<u>Alternativer Lösungsansatz:</u>
Aus $v_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2} v_1$ folgt für den Stoß zwischen Kugel 2 und 3 die Geschwindigkeit

$$v_3' = \frac{2m_2}{m_2+m_3} v_2' = \frac{2m_2}{m_2+m_3}\frac{2m_1}{m_1+m_2} v_1$$

nach dem Stoß. Die Energie von Kugel 3 ist proportional zu $v_3'^2$, d.h. es genügt, das Maximum von v_3' bezüglich m_2 zu bestimmen, was zum gleichen Resultat $m_2 = \sqrt{m_1 m_3}$ führt.

b) Es gilt, mit $E_1 = 0{,}5\,\mathrm{J}J$:

$$E_3 = \frac{16z}{(1+\sqrt{z})^2 \cdot (1+\sqrt{z})^2} E_1 = \frac{16z}{(1+\sqrt{z})^4} E1 \approx 0.863 E_1 \approx 0{,}431\,\mathrm{J}.$$

c) Beim direkten Stoß der ersten mit der dritten Kugel ist:

$$E_3' = \frac{4z}{(1+z)^2} E_1 = 0.75 E_1 = 0{,}371\,\mathrm{J}.$$

$\Rightarrow$ Energieübertrag von m_1 auf m_3 ist größer, wenn $m_2 = \sqrt{m_1 m_3}$ dazwischen geschaltet ist!