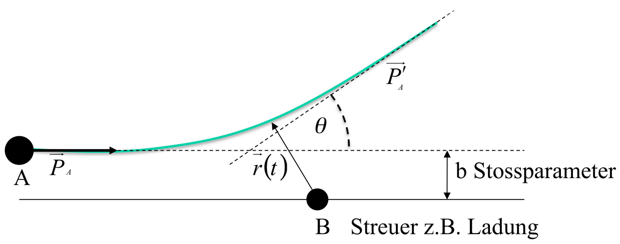
Lösungen Aufgabenblatt 7

Übungen E1 – Mechanik WS 2017/2018

Dozent: Prof. Dr. Hermann Gaub
Übungsleitung: Dr. Martin Benoit und Dr. Res Jöhr

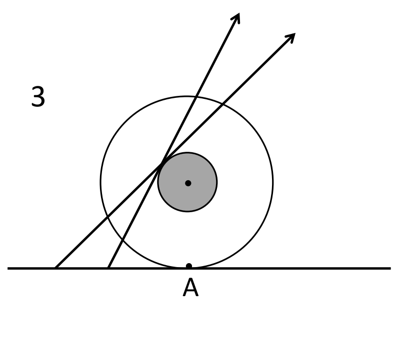
Verständnisfragen

i.) der Stoßparameter b repräsentiert in etwa der Abstand zum zentralen Stoß. Je kleiner b wird, desto größer wird der Ablenkwinkel θ.



ii.) Die Energie der Sonnenstrahlung stammt aus Kernfusionsprozessen. Dabei entstehen, Heliumkerne, die eine kleinere Masse als die Gesamtmasse der beiden ursprünglichen Wasserstoffkerne haben ($\Delta m = \frac{E}{c^2}$). Wegen der Kernfusion auf der Sonne werden nicht nur massebehaftete Teilchen ins Weltall geschleudert (Neutrinos ect... Sonnenwind) sondern auch Photonen. In der Tat wird über Photonen der Löwenanteil (ca. 80%) des Masseverlustes der Sonne bestritten. Folglich nähme die Sonnenmasse also auch unter Annahme, dass ausschließlich Photonen emittiert würden, ab.

iii.) Dann liegt die Zugrichtung immer oberhalb des Mittelpunktes und die Rolle kommt unter jedem Winkel unter dem Sofa heraus, wobei sich der Faden jedoch dabei abwickelt. $\Rightarrow$ Die Verlängerung von $\overrightarrow{F}$ ist immer hinter dem Auflagepunkt A, egal in welcher Richtung ϕ der Faden gezogen wird.



Aufgabe 1 *(Inverse Lorentz-Transformation)*

(a) Die Matrix der inversen Lorentz-Transformation um $-v$ muss, multipliziert mit der Matrix der Lorentz-Transformation um v, die Einheitsmatrix ergeben. Dies trifft, wie wir sehen, zu:

$$\hat{L}(v)\hat{L}(-v) = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \frac{v}{c}\gamma \\ \frac{v}{c}\gamma & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Achtung in der Angabe lautete das Matrixelement $\hat{L}_{12}(-v)$ bis zum 5.12. $-v$ anstatt $-\frac{v}{c}$!)

(b) Die relativistische Energie ist durch die Formel $E = m_0 c^2 \gamma$ gegeben. Diese Gleichung stellen wir nach γ um:

$$\gamma = \frac{E}{m_0 c^2} = 1,951\ldots$$

Gleichzeitig ist $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Diese beiden Formeln setzen wir gleich und lösen nach v auf:

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0,8591c = 2,576 \cdot 10^8 m/s$$

Jetzt kennen wir die Geschwindigkeit und können t ausrechnen:

$$t = \frac{D}{v} = \frac{D}{c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}} = 582,3s = 9min\ 42s$$

(Achtung in der Angabe war bis zum 4.12. D um einen Faktor 1000 zu groß!)

Aufgabe 2 *(Relativistische Energie)*

(a) Für die relativistische Energie E eines Teilchens gilt:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \text{ und daher } 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{(m_0 c^2)^2}{E^2}.$$

Daraus folgt

$$\frac{v}{c} = \left(1 - \frac{(m_0 c^2)^2}{E^2}\right)^{1/2}$$

(b) Die ersten beiden Terme der Taylorenwicklung von $f(x) = \sqrt{1-x}$ um den Punkt $a = 0$ sind gegeben durch:

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$$

Damit gilt für die Entwicklung der Funktion aus (a):

$$\frac{v}{c} = \left(1 - \frac{(m_0 c^2)^2}{E^2}\right)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}\frac{(m_0 c^2)^2}{E^2} + \cdots \tag{1}$$

(c) Wir lösen Gleichung 1 nach v auf und setzen $E_{kin} = 0.51 MeV$ ein:

$$\begin{aligned} v_{0,51} &= c\sqrt{1 - \frac{(m_0c^2)^2}{E^2}} = c\sqrt{1 - \frac{E_0^2}{(E_0 + E_kin)^2}} \\ &= c\sqrt{1 - \frac{1}{(1 + E_kin/E_0)^2}} \\ &= c\sqrt{1 - \frac{1}{\big(1 + (0,51\text{MeV})/(0,511\text{MeV})\big)^2}} \\ &= 0,866\text{c}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 *(Relativistische Stöße)*

a) Wir bezeichnen die beiden einlaufenden Teilchen mit 1 und 2 und den Zwichenzustand mit einem Strich. Dann gelten die Erhaltungssätze für Impuls und Energie:

$$Impuls: m'\gamma'v' = m_1\gamma_1v_1 \tag{2}$$

$$Energie: m'\gamma'c^2 = m_1\gamma_1c^2 + m_2c^2 \tag{3}$$

Das sind zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten m'und v'des Zwichenzustands. (γ' ist eine bekannte Funktion von v'.) Wir bestimmen v' durch Division der beiden Erhaltungssätze:

$$v' = \frac{m_1\gamma_1v_1}{m_1\gamma_1 + m_2} \tag{4}$$

b) Es folgt m' aus der Energieerhaltung:

$$m' = \frac{m_1\gamma_1 + m_2}{\gamma'} = (m_1\gamma_1 + m_2)\sqrt{1 - \frac{m_1^2\gamma_1^2v_1^2}{(m_1\gamma_1 + m_2)^2c^2}} = \sqrt{(m_1\gamma_1 + m_2)^2 - m_1^2\gamma_1^2\frac{v_1^2}{c^2}} \tag{5}$$

$$= \sqrt{m_1^2\gamma_1^2\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right) + 2m_1m_2\gamma_1 + m_2^2} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\gamma_1} \tag{6}$$

Für $v_1 = 0$, d.h. $\gamma_1 = 1$, ist die Masse m' des Zwichenzustands also

$$m' = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\gamma_1} = m_1 + m_2 \tag{7}$$

Sobald Teilchen 1 aber mit von Null verschiedener Geschwindigkeit auf Teilchen 2 trifft, ist $\gamma_1 > 1$ und daher auch

$$m' = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\gamma_1} > m_1 + m_2 \tag{8}$$

c) Wir können die in a) hergeleitete Formel für m' verwenden und diese nach $m_1\gamma_1$ auflösen:

$$m' = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\gamma_1} \tag{9}$$

aufgelöst nach $m_1\gamma_1$ ergibt:

$$m_1\gamma_1 = \frac{1}{2m_2}(m'^2 - m_1^2 - m_2^2) \tag{10}$$

Also für das Elektron-Positron-Reaktion:

$$E_{e^+} = m_e \gamma_{e^+} c^2 = \frac{1}{2m_e}(m'^2 - 2m_2^2)c^2 \tag{11}$$

Die kinetische Energie des Positrons ist also:

$$K_{e^+} = E_{e^+} - m_e c^2 = \frac{1}{2m_e}(m'^2 - 4m_2^2)c^2 \tag{12}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 511 \frac{keV}{c^2}} \cdot \left((90 \frac{GeV}{c^2})^2 - 4 \cdot (511 \frac{keV}{c^2})^2 \right) c^2 = 7,9 \cdot 10^6 GeV \tag{13}$$

Zum Vergleich: Mit heutiger Technologie kann man Positronen und Elektronen auf Energien von etwa 100 GeV beschleunigen.

d) Wir gehen wieder von den Erhaltungssätzen aus, diesmal aber in der Form:

$$Impuls : m'\gamma' v' = 0 \tag{14}$$

$$Energie : m'\gamma' c^2 = 2m_e \gamma c^2 \tag{15}$$

Denn der Gesamtimpuls des kollidierenden e^+e^-- Paares verschwindet, da sich beide Teilchen mit gleicher Energie (also wegen gleicher Masse mit gleicher Geschwindigkeit, als auch gleichem Impuls) in entgegengesetzte Richtung bewegen. Ihre Energien sind dann jeweils $m_e \gamma c^2$.
Aus der Impulserhaltung ergibt sich sofort $v' = 0$, also $\gamma' = 1$, und damit aus der Energieerhaltung:

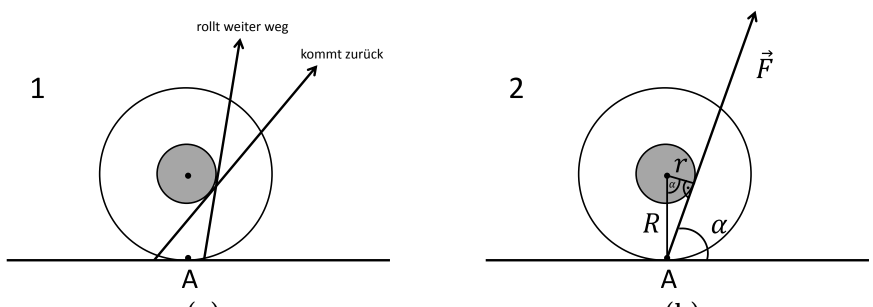
$$m_e \gamma c^2 = \frac{1}{2} m' c^2 \tag{16}$$

Die nötige Energie des Elektrons bzw. Positrons im Speichering ist also genau die Hälfte der Ruheenergie des zu erzeugenden Zwichenzustands, d.h.

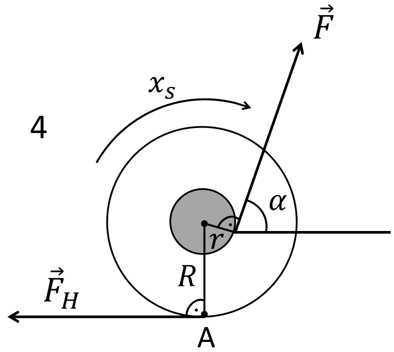
$$E_{e^-} = E_{e^+} = 45 GeV \tag{17}$$

Das ist ein sehr plausibles Ergebnis. Und es ist extrem viel weniger als die benötigte Energie bei ruhendem Target. Die kinetische Energie K von Elektron bzw. Positron ist sogar noch ein wenig kleiner, da man von E noch die Ruheenergie der Teilchen $E_0 = m_e c^2 = 511 keV$ abziehen muss. Der Unterschied ist aber hier verschwindend gering.

Aufgabe 4 *(Garnrolle)*



(a) (b)



a) Wir ersetzen im Folgenden den Winkel ϕ mit α. Der Radius der Garnrolle sei R, der Fadenabrollradius sei r. Der Auflagepunkt A legt die Tatsächliche Drehachse fest! Je nach Zugrichtung liegt die Verlängerung der Fadenlinie vor oder hinter dem Drehpunkt A (Bild 1). Der Winkel, bei dem die Rolle „durchdreht "(Bild 2) ist gegeben durch $\cos(\alpha) = \frac{r}{R}$

b) Beschleunigung des Schwerpunkts: $a_S = \ddot{x}_S$. Der Zug am Faden bewirkt eine horizontale Bewegung (Translation), aber auch eine Rotation der Rolle.

Für die horizontale Beschleunigungskraft gilt:
$m\ddot{x}_S = F\cos(\alpha) - F_H$
Dabei ist F_H die aufgrund der Haftung horizontal entgegenwirkende Kraft. Sie ist noch unbekannt. Da wir also mit $\ddot{x}_S$ und F_H zwei Unbekannte haben, brauchen wir eine zweite Gleichung. Wir erhalten sie durch Anwendung des Drehimpulssatzes bzgl. des Schwerpunktes:
$T = \frac{dL}{dt} = I\dot{\omega} = I\ddot{\phi} = -I\frac{\ddot{x}_S}{R}$
Hier benutzt man für die abgewickelte Strecke $\Rightarrow x_S = -\phi \cdot R$. Minus Vorzeichen, da die Rolle im Uhrzeigersinn rollt. (Nach mathematischer Konvention ist eine Winkeldrehung gegen den Uhrzeigersinn positiv)
Beim Gesamt-Drehmoment $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$ mit Betrag T muss beachtet werden, dass dem Drehmoment durch den Faden
$T_F = T_{Faden} = r \cdot F \cdot \sin(90°)$
das Drehmoment durch die Haftung
$T_H = T_{Haftung} = R \cdot F_H \cdot \sin(90°)$ entgegenwirkt.
$\Rightarrow T = T_F - T_H = F \cdot r - F_H \cdot R \qquad \Rightarrow F_H = \frac{F \cdot r - T}{R} = \frac{F \cdot r - \frac{I}{R}\ddot{x}_S}{R}$
$\Rightarrow m\ddot{x}_S = F\cos(\alpha) - \frac{F \cdot r + \frac{I}{R}\ddot{x}_S}{R}$
$\Rightarrow \ddot{x}_S = \frac{F(\cos(\alpha) - \frac{r}{R})}{\frac{I}{R^2} + m}$
Hier sieht man auch noch einmal, dass genau bei $\cos(\alpha) = \frac{r}{R}$ die Beschleunigung ihr Vorzeichen ändert.

c) Der Vektor $\vec{r}$ vom Drehpunkt zum Angriffspunkt der Kraft ist allgemein gegeben durch:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\sin\phi \\ R - r\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ die Kraft } \vec{F} \text{ durch } \vec{F} = \begin{pmatrix} F\cos\phi \\ F\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich der Drehmoment zu:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} r\sin\phi \\ R - r\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F\cos\phi \\ F\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ rF\sin^2\phi - RF\cos\phi + rF\cos^2\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (r - R\cos\phi)F \end{pmatrix}$$