Lösungsblatt 8

Übungen E1 – Mechanik WS 2017/2018

Dozent: Prof. Dr. Hermann Gaub
Übungsleitung: Dr. Martin Benoit und Dr. Res Jöhr

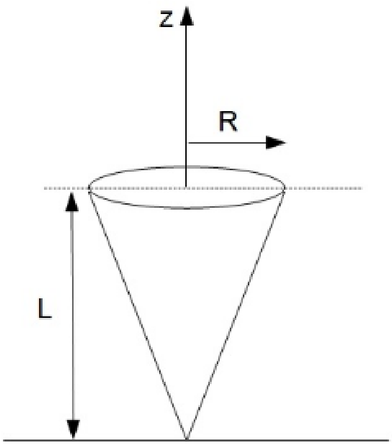
Verständnisfragen

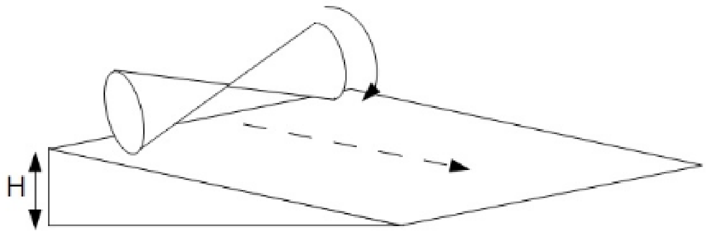
i.) Grundsätzlich haben alle Körper 3 Hauptträgheitsachsen durch den Körperschwerpunkt!
Achse 1: die Achse mit dem kleinsten Trägheitsmoment
Achse 3: die Achse mit dem größten Trägheitsmoment
Achse 2: die Achse die senkrecht zu den ersten beiden steht.
Bei der Kugel haben alle Achsen das gleiche Trägheitsmoment daher hat sie unendlich viele Hauptträgheitsachsen($2/5mr^2$) in jede beliebige Richtung. Beim Stab ist die Achse 1 durch die Längsache parallel zum Stab $I_1 = 1/2mr^2$;wobei die Dicke des Stabes vernachlässigt wird ($r = 0$). Alle (unendlich vielen) weiteren Achsen durch den Stabschwerpunkt stehen dazu senkrecht und haben das Trägheitsmoment $I_2 = I_3 = 1/12ml^2$. Beim Quader sind die drei Hauptachsen exakt festgelegt und jeweils die Mittelsenkrechten der Begrenzungsflächen

ii.) Die Kugel ist am schnellsten, dann der Zylinder und dann der Ring. Das Objekt mit dem kleinsten Trägheitsmoment erfährt die größte Beschleunigung. Auf das herabrollende Objekt wirkt Reibungskraft $\vec{F}_R$ und anteilig die Gewichtskraft $ma_s = F_R - mg\sin(\theta)$. Die Reibungskraft erzeugt ein Drehmoment $M = rF_R = I\alpha$ und führt zu einer Rollbewegung des Objekts, anderweitig würde es nur rutschen. Mit $a_s = r\alpha$ folgt $a_s = \frac{-g\sin(\theta)}{1+I/mr^2}$

iii.) Anfangs sind die Drehimpulse von Person und Rad in Richtung der Drehstuhlachse gleich Null. Nach dem Kippen des rotierenden Rades nach oben, erhält das System den Drehimpuls $\vec{L}_R$ in Richtung der Drehstuhlachse. Aufgrund der Drehimpulserhaltung muss der Gesamtdrehimpuls $\vec{L}_p + \vec{L}_R$ verschwinden. Deshalb erhält die Person einen gleichgroßen entgegengesetzten Drehimpuls. Die Person wird also entgegen der Drehrichtung des Rades um die Stuhlachse rotieren. Dieses Drehmoment wird während der Verkippung durch den Kraftaufwand der Person erzeugt $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$.

Aufgabe 1 *Rollender Doppelkegel*





a) Zeigen Sie durch explizite Integration, dass das Trägheitsmoment eines homogenen Kegels mit Radius R, Höhe L und Masse M bezüglich seiner Symmetrieachse $I_{Kegel} = \frac{3}{10}MR^2$ ist.

b) Welche Geschwindigkeit erreicht ein Doppelkegel mit Radius R, Breite 2L beim Herunterrollen einer Schrägen von der Höhe h=H bis zum Fuß der Schrägen (h=0)?

Lösung:

a) Parametrisierung $r(z) = k \cdot z$ mit $r(L) \overset{!}{=} R \rightarrow k = \frac{R}{L}$
$I = \int\limits_V r_\perp^2 \mathrm{d}m \Rightarrow$ Für homogenen Körper $I = \rho \int\limits_V r_\perp^2 dV$ mit $\rho = \frac{M}{\frac{1}{3}\pi R^2 L}$
Verwendung von Zylinderkoordinaten:

$$I_{Kegel} = \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^L \mathrm{d}z \int_0^{r(z)} r^2 r \mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\rho \int_0^L \frac{1}{4}(kz)^4 \mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}\rho k^4 \frac{1}{5} L^5 = \frac{\pi}{10} \frac{M}{\frac{1}{3}R^2 \pi L} \frac{R^4}{L^4} L^5$$

$$= \frac{3}{10} M R^2$$

b) $E_{pot}^{oben} = E_{kin}^{unten} = E_{trans} + E_{rot}$

$$2MgH = \frac{1}{2}(2M)v^2 + \frac{1}{2}(2I_K)\omega^2 \qquad \text{mit } \omega = \frac{v}{R}$$

$$= Mv^2 + I_K \frac{v^2}{R^2}$$

$$v^2 = \frac{2MgH}{M + \frac{I_K}{R^2}} = \frac{2MgH}{M + \frac{\frac{3}{10}MR^2}{R^2}} = \frac{20}{13} gH$$

$$v = \sqrt{\frac{20}{13} gH}$$

Aufgabe 2 *Dünner Stab*

Bestimmen Sie das Trägheitsmoment eines dünnnen Stabes um eine Achse

a) senkrecht zum Stab durch sein Ende.

b) senkrecht zum Stab durch seine Mitte.

c) Zeigen Sie nun mittels des Steiner'schen Satzes, dass das Trägheitsmoment des Stabes um eine Achse durch das Stabende viermal so groß ist wie dasjenige um eine Achse durch seinen Schwerpunkt.

Lösung:

a) $I = \int r^2 \rho dV$
$\rightarrow I = \rho A \int_0^l x^2 dx = \rho A l^3/3 = 1/3 ml^2$

b) $I = 2\rho A \int_0^{l/2} x^2 dx = 2/3 \rho A l^3/8 = 1/12 ml^2$

c) Um Mittelpunkt: $I_1 = 2\rho A \int_0^{l/2} x^2 dx = 1/12 ml^2$
Satz von Steiner: $I = I_{Schwerpunkt} + md^2$
$\rightarrow I_2 = I_1 + m(\frac{l}{2})^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}$
$\rightarrow$ stimmt mit Ergebnis aus a) überein
$\frac{I_2}{I_1} = 4$

Aufgabe 3 *Bloß keine Bauchlandung ...*

Beim Versuch den frühen Vogel (der gerade seinen wohlverdienten Wurm verspeist) auf einem Ast zu erwischen, rutscht eine verkaterte Katze aus und fällt mit dem Rücken voraus vom Baum. Mit welcher Frequenz müsste die Katze mit ihrem Schwanz rotieren, damit sie bei der noch verbleibenden Fallhöhe von $h = 2\,\text{m}$ wieder auf ihre Beine fällt? Idealisieren Sie die Katze durch einen Zylinder der Länge 40 cm und des Durchmessers 10 cm. Stellen Sie den Schwanz als dazu senkrechten Stab mit einer Länge von 30 cm und einem Durchmesser von 1 cm dar. Die Katze habe eine homogene Dichte ρ und die Masse M.

Lösung:
Nötige Rotation des Katzenkörpers (V_K): $\omega_K = \frac{\pi}{t_{fall}}$
Fallzeit: $s = \frac{1}{2} g t_{fall}^2$ und $t_{fall} = \sqrt{\frac{2s}{g}}$
Das Trägheitsmoment des Katzenkörpers (Zylinder mit Radius R_K): $J_K = \frac{1}{2} V_K \rho R_K^2$
Trägheitsmoment eines Dünnen Stabes bei Rotation um Achse durch Schwerpunkt: $J = \frac{1}{12} ML^2$
Trägheitsmoment J_S des Schwanzes (Dünner Stab + Steinersche Satz):
$J_S = J + M(\frac{L}{2})^2 = V_S \rho \frac{1}{3} L_S^2$
Betragsweise Drehimpulserhaltung für Rotation des Schwanzes (die Vektoren ω_S und ω_K zeigen in natürlich in gegensätzliche Richtungen, müssen aber für das Problem vom Betrag her gleich sein)
$J_K \omega_K = J_S \omega_S$

$$\omega_S = \frac{J_K}{J_S} \omega_K = \frac{3 V_K J_K \rho R_K^2}{2 V_S J_S \rho R_S^2} \frac{\pi}{\sqrt{\frac{2s}{g}}} = \frac{3\pi L_K R_K^4}{2 R_S^2 L_S^3 \sqrt{\frac{2s}{g}}} = 27 s^{-1}$$

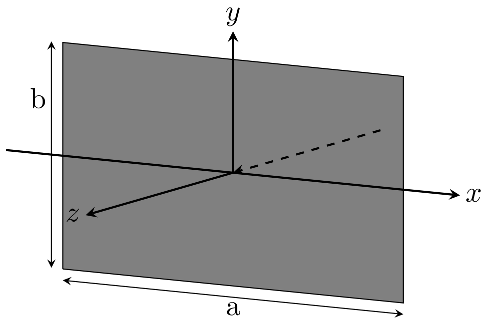
Aufgabe 4 *Trägheitsmomente eines Quaders*

Wir betrachten einen Quader der Länge a, Breite b, Dicke d und Masse m ($d \ll a$). Dieser hat ein Trägheitsmoment von

$$I_3 = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$$

um die Drehachse durch seinen Mittelpunkt und senkrecht zu seiner Fläche.

a) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente.
Lösung: Die drei Hauptachsen des Quaders sind seine Symmetrieachsen. Alle drei Hauptachsen durchqueren den Mittelpunkt des Quaders; siehe Skizze:

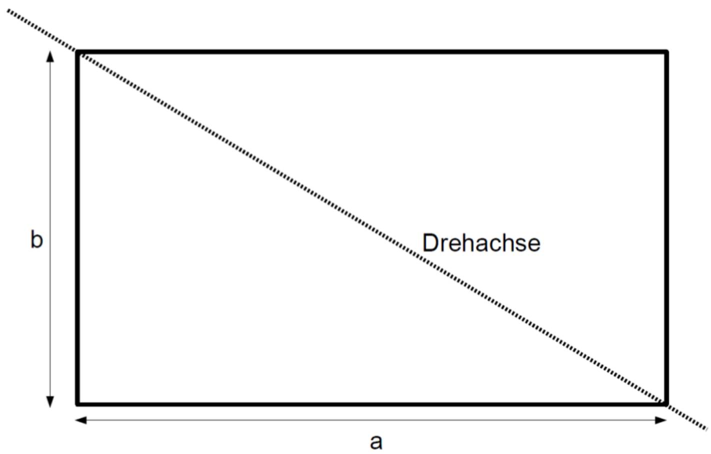


Das Trägheitsmoment für die z-Richtung ist bereits bekannt. Die anderen Trägheitsmomente bezüglich der anderen Hauptachsen folgen aus Analogie dazu. Für vernachlässigbar kleine Dicken d des Quaders sind diese gegeben durch:

$$I_1 = \frac{m}{12}(b^2 + d^2) \approx \frac{m}{12} b^2 \qquad I_2 = \frac{m}{12}(a^2 + d^2) \approx \frac{m}{12} a^2.$$

Es gilt $I_1 < I_2 < I_3$, wie es bereits aus der Vorlesung bekannt ist.

b) Was ist das Trägheitsmoment des Quaders um eine Drehachse parallel zum Quader, die eine Diagonale des Rechtecks ist (siehe Skizze)?



Lösung: Das Trägheitsmoment des Quaders entlang einer beliebigen Richtung $\vec{n}$ durch den Schwerpunkt lässt sich elegant mit Hilfe des Trägheitstensors Θ berechnen. Da die I_i den Trägheitsmomenten der Hauptachsen entsprechen, ist dieser gerade durch

$$\Theta = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

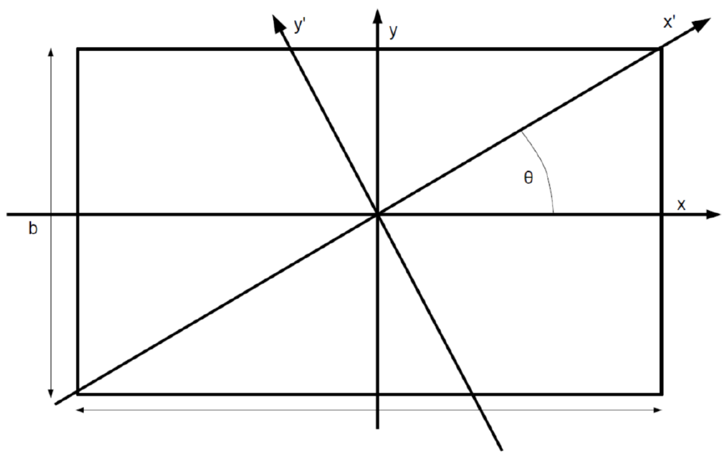
gegeben. Das Trägheitsmoment I_n für die Drehung entlang eines Vektors durch den Schwerpunkt ist dann

$$I_n = \vec{n}^T \Theta \vec{n}.$$

In unserem Fall ist $\vec{n}^T = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} a & b & 0 \end{pmatrix}$ und somit wird I_n zu

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} a & b & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{m}{12} \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{m}{12} \frac{a^2b^2 + a^2b^2}{a^2+b^2} = \frac{m}{6} \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

Alternative Lösung: Die Aufgabe kann auch ohne die Verwendung des Trägheitstensors Θ gelöst werden. Dies ist jedoch etwas umständlicher.
Um das Trägheitsmoment um die Diagonale zu finden, bietet es sich an, zwei x-y-Koordinatensysteme zu verwenden, eines, das axial auf den Quader ausgerichtet ist, und eines, das auf die Diagonale ausgerichtet ist:



Das Trägheitsmoment um die x'-Achse ist

$$I_{x'} = \sum m_i y_i'^2.$$

Hier ist m_i ein Massenelement des Quaders und die Summe geht über den gesamten Quader. Nun ist y' gegeben durch

$$y' = y\cos(\theta) - x\sin(\theta)$$

und somit

$$I_{x'} = \sum m_i y_i^2 \cos^2(\theta) + \sum m_i x_i^2 \sin^2(\theta) - 2\sum m_i x_i y_i \cos(\theta)\sin(\theta)$$

Aber wir wissen auch, dass

$$\sum m_i x_i^2 = I_2 = \frac{1}{12} m a^2$$
$$\sum m_i y_i^2 = I_1 = \frac{1}{12} m b^2$$

Aus Symmetriegründen gilt $\sum m_i x_i y_i = 0$
Also ist dann I'_x :

$$I_{x'} = \frac{1}{12} m(a^2 \sin^2(\theta) + b^2 \cos^2(\theta))$$

Wir wissen auch, dass

$$\cos^2(\theta) = \frac{a^2}{a^2 + b^2}, \qquad \sin^2(\theta) = \frac{b^2}{a^2 + b^2}$$

Setzt man dies in die Gleichung für das Trägheitsmoment ein, erhält man

$$I_{x'} = \frac{1}{6} m \left(\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \right)$$

c) Der Quader rotiert nun um diese diagonale Drehachse. Zeigen Sie, dass der Winkel zwischen Winkelgeschwindigkeit und Drehimpuls durch

$$\arctan\left(\frac{a}{b}\right) - \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

gegeben ist.

Lösung: Wenn sich der Quader mit Winkelgeschwindigkeit ω um seine Diagonale dreht, dann hat die Winkelgeschwindigkeit in der x-Richtung die Komponente $\omega \cos(\theta)$ und in die y-Richtung die Komponente $\omega \sin(\theta)$. Also gilt für den Drehimpuls:

$$L_x = I_1 \omega \cos(\theta)$$
$$L_y = I_2 \omega \sin(\theta)$$

Daraus folgt der Winkel zwischen der Richtung der Drehimpulsachse und der x-Achse:

$$\arctan\left(\frac{I_2 \omega \sin(\theta)}{I_1 \omega \cos(\theta)}\right) = \arctan\left(\frac{a^2 \sin(\theta)}{b^2 \cos(\theta)}\right) = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$$

Der Winkel zwischen dem Winkelgeschwindigkeitsvektor und der x-Achse beträgt

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Also beträgt der Winkel zwischen den beiden Vektoren:

$$\arctan\left(\frac{a}{b}\right) - \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$