Lösungen Aufgabenblatt 9

Übungen E1 – Mechanik WS 2017/2018

Dozent: Prof. Dr. Hermann Gaub
Übungsleitung: Dr. Martin Benoit und Dr. Res Jöhr

Verständnisfragen

i.) Wirkt ein äußeres Drehmoment auf einen Kreisel (z. B. durch Erdanziehung), so ändert dieser seinen Drehimpuls in Richtung des Drehmoments, was sich in der Rotation des Kreisels um die Achse parallel zur äußeren Kraft widerspiegelt. Diese Rotation wird als Präzession bezeichnet. Da das Drehmoment senkrecht zur anliegenden Kraft ist, scheint es, als würde der Kreisel der äusseren Kraft ausweichen.

ii.) Im allgemeinen Fall eines kräftefreien Kreisels zeigt der Drehimpuls nicht parallel zum minimalen oder maximalen Trägheitsmoment des Kreisels. Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ ist dann nicht parallel zum Drehimpulsvektor $\vec{L}$, sondern dreht sich um diesen herum. Dieses Verhalten, welches sich als Schwanken des Kreisel äußert, wird als Nutation bezeichnet.

iii.) Rotationen bei denen der Drehimpuls entlang der Achse des minimalen oder maximalen Trägheitsmoments zeigt, werden als stabil bezeichnet.

iv.) Für $\alpha < 90°$ ändert sich Ω nicht, da sowohl der Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ als auch das Drehmoment $\boldsymbol{M}$ in horizontaler Richtung um einen Faktor $\sin\alpha$ kleiner werden.

Aufgabe 1 *(Präzession eines Gyroskops)*

a)

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t = \Omega|L| \begin{pmatrix} -\sin\Omega t \\ \cos\Omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Die Gravitationskraft beträgt $\boldsymbol{F_g} = (0, 0, -mg)^T$. Damit ist

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F_g} = bmg \begin{pmatrix} \cos\Omega t \\ \sin\Omega t \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = bmg \begin{pmatrix} -\sin\Omega t \\ \cos\Omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für $\alpha = 90°$ ergibt sich $M = bmg = 0{,}6\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}$. $\boldsymbol{M}$ ist dabei stets senkrecht zur momentanen Drehachse und zeigt in horizontale Richtung.

c) Es gilt stets $\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{M}$. Hier also

$$\Omega|L| \begin{pmatrix} -\sin\Omega t \\ \cos\Omega t \\ 0 \end{pmatrix} = bmg \begin{pmatrix} -\sin\Omega t \\ \cos\Omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

und somit durch Einsetzen von $|L| = I\omega$

$$I\omega\Omega = bmg \qquad \Leftrightarrow \qquad \Omega = \frac{bmg}{I\omega} \tag{1}$$

Setzt man die Werte von $\omega_1 = 150\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ und $\omega_2 = 6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ein, so erhält man $\Omega_1 = 0{,}4\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ und $\Omega_2 = 10\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
Gleichung 1 ist nur für die Fälle gültig, in denen der Drehimpuls des Kreisels bezüglich der Präzessionsachse gegenüber dem Drehimpuls des Kreisels vernachlässigbar klein ist. Diese Bedingung ist nur für den ersten Fall mit $\omega_1 = 150\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ erfüllt. Für sehr langsame Drehungen ω des Kreisels um seine Figurenachse impliziert die Gleichung fälschlicherweise, dass die Präzessionsbewegung schneller wird. Dies wird bei Betrachtung des zweiten Falles deutlich. Dieser Fall kann nicht mit dieser vereinfachten Formel berechnet werden.

Aufgabe 2 *(Weltklimagipfel)*

Die Eiskappen an den Polen enthalten jeweils etwa $1{,}2 \times 10^{19}\,\mathrm{kg}$ Eis. Diese Masse trägt so gut wie nichts zum Trägheitsmoment der Erde bei, da sie sich sehr nahe an der Drehachse befindet. Schätzen Sie ab, wie sich die Länge eines Tages änderte, wenn die Polkappen abschmölzen und sich dieses Wasser gleichmäßig über die Erdoberfläche ($r_E = 6370\,\mathrm{km}$) verteilte.
Hinweis: Der Einfluss der Polkappenschmelzung auf die Erhöhung des Meeresspiegel hängt vom Pol ab.

Lösung: Die Periodendauer für eine Erdumdrehung lässt sich aus dem Drehimpuls der Erde berechnen ($M_E = 5{,}98 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$). Es gilt $L = I\omega = \frac{2\pi I}{T}$ woraus $T = \frac{2\pi I}{L}$ folgt. Dabei ist das Trägheitsmoment der Erde durch

$$I = \frac{2}{5} M_E R_E^2 = 9{,}7 \times 10^{37}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

gegeben (Formel aus Formelsammlung oder analog zu unten). Der Drehimpuls der Erde bleibt während des Schmelzens der Polkappen erhalten, da dabei keine äußeren Kräfte oder Drehmomente wirken. Die neue Periodendauer ist also durch $T_2 = \frac{2\pi(I+\Delta I)}{L}$ gegeben, wobei ΔI das zusätzliche Trägheitsmoment ist, welches durch die Schmelzung der Polkappen verursacht wird. Oder anders ausgedrückt, ändert sich die Periodendauer wie folgt

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{2\pi(I+\Delta I)}{L} - \frac{2\pi I}{L} = \frac{2\pi I}{L}\frac{\Delta I}{I} = T\frac{\Delta I}{I}. \tag{2}$$

Unter der Annahme, dass sich das geschmolzene Eis gleichmäßig über den Erdball verteilt, können wir dieses zusätzliche Trägheitsmoment aus dem Trägheitsmoment einer dünnwandigen hohlen Kugel berechnen. Dieses ist gegeben durch:

$$I = \frac{2}{3} m R^2.$$

Herleitung: Zu lösen ist das Integral

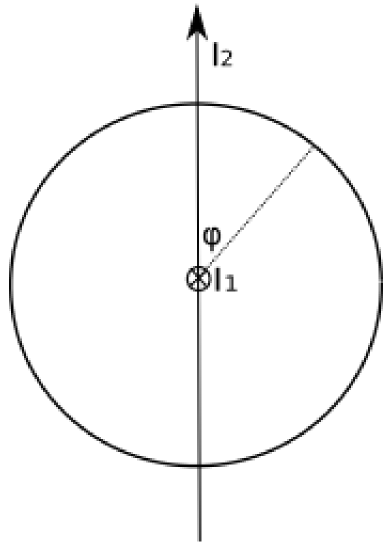
$$I = \int (x^2 + y^2) \rho dS.$$

Am einfachsten lässt sich dieses Integral in Kugelkoordinaten berechnen ($x = R\sin\theta\cos\phi$, $y = R\sin\theta\sin\phi$, $z = R\cos\theta$, $dS = R^2 \sin\theta d\theta d\phi$).

$$I = \rho R^4 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^3\theta d\theta d\phi = 2\pi\rho R^4 \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta}_{=\frac{4}{3}}$$

Mit $m = 4\pi\rho R^2$ erhält man gerade
$$I = \frac{2}{3}mR^2.$$
Das Trägheitsmoment ΔI ergibt sich dann zu: $3{,}246 \times 10^{32}\,\mathrm{kg\,m^2}$.
Eingesetzt in Gleichung 2 ist die daraus resultierende Änderung der Periode $\Delta T = 3{,}2 \times 10^{-6}\,\mathrm{d} = 0{,}27\,\mathrm{s}$. Der Tag wäre also eine Viertelsekunde länger, weil das Trägheitsmoment zunähme.
Wir haben hier der Einfachheit halber angenommen, dass der Nordpol komplett im Wasser schwimmt und daher der Wasserspiegel keine Änderung erfährt. Diese Annahme ist natürlich nicht ganz korrekt, wenn man das Eis aus Alaska, Sibirien und Grönland auch noch mit zählte...

Aufgabe 3 *(Chandler Wobble)*



Das Trägheitsmoment eines Rings um die Achse senkrecht zum Ring durch dessen Mittelpunkt beträgt $I_1 = mr^2$, da die Masse stets Abstand r von der Achse besitzt.
Das Trägkeitsmoment um eine Achse in der Ringebene durch dessen Mittelpunkt beträgt
$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{m\mathrm{d}\phi}{2\pi}(r\sin\phi)^2 = \frac{1}{2}mr^2$$

Folglich besitzt die Erde das Trägheitsmoment $I_{NS} = I + mr^2$ um die Nord-Süd-Achse und $I_{Aq} = I + \frac{1}{2}mr^2$ um eine Achse durch den Äquator. Sei $T = 1\,\mathrm{d}$ die Periodendauer der Erdrotation. Die Formel für die Nutationsfrequenz ergibt
$$\Omega = \frac{I_{NS} - I_{Aq}}{I_{Aq}}\frac{2\pi}{T} = \frac{\frac{1}{2}mr^2}{I + \frac{1}{2}mr^2}\frac{2\pi}{T}$$
Die Periodendauer des Chandler-Wobbles beträgt also
$$T_{Chandler} = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{I + mr^2}{\frac{1}{2}mr^2}T = 299\,\mathrm{d}$$

Aufgabe 4 *(Würfelkontraktion)*

a) Für einen geraden Stab mit rechteckigem Querschnitt (Länge l, Höhe h, Breite b), an dem eine Zugkraft F in Längsrichtung appliziert wird, gilt
$$F = EA\frac{\Delta l}{l}\ ,\ \frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta b}{b} = -\mu\frac{\Delta l}{l} \tag{3}$$
für die Änderungen von Länge, Höhe und Breite. Wirkt also auf einen Würfel mit $h = b = l$ und $A = l^2$ die Schubkraft F_x, dann ist also
$$\Delta l_x = -\frac{F_x}{El}\ ,\ \Delta l_y = \mu\frac{F_x}{El}\ ,\ \Delta l_z = \mu\frac{F_x}{El} \tag{4}$$

Analog die Wirkungen von Schubkräften in die beiden anderen Richtungen:

$$\Delta l_x = \mu\frac{F_y}{El}\ ,\ \Delta l_y = -\frac{F_y}{El}\ ,\ \Delta l_z = \mu\frac{F_y}{El} \tag{5}$$

$$\Delta l_x = \mu\frac{F_z}{El}\ ,\ \Delta l_y = \mu\frac{F_z}{El}\ ,\ \Delta l_z = -\frac{F_z}{El} \tag{6}$$

Greifen die Kräfte F_x, F_y und F_z zugleich an, dann sollen sich laut Angabe deren Einzelwirkungen linear zur Gesamtwirkung überlagern. Also

$$\Delta l_x = -\frac{F_x}{El} + \mu\frac{F_y}{El} + \mu\frac{F_z}{El} \tag{7}$$

$$\Delta l_y = \mu\frac{F_x}{El} - \frac{F_y}{El} + \mu\frac{F_z}{El} \tag{8}$$

$$\Delta l_z = \mu\frac{F_x}{El} + \mu\frac{F_y}{El} - \frac{F_z}{El} \tag{9}$$

Einsetzen der gegebenen Werte $E = 20\,\mathrm{MPa}$, $\mu = 0{,}45$, $l = 2\,\mathrm{cm}$ und der Kräfte $F_x = 200\,\mathrm{N}$, $F_y = 500\,\mathrm{N}$, $F_z = 1000\,\mathrm{N}$ ergibt

$$\Delta l_x = 1{,}2\,\mathrm{mm}\ ,\ \Delta l_y = 0{,}1\,\mathrm{mm}\ ,\ \Delta l_z = -1{,}7\,\mathrm{mm} \tag{10}$$

b) Nun sind die Kompressionen gegeben und die Kräfte gesucht. Das führt auf das Gleichungssystem

$$-\frac{F_x}{El} + \mu\frac{F_y}{El} + \mu\frac{F_z}{El} \stackrel{!}{=} 0 \tag{11}$$

$$\mu\frac{F_x}{El} - \frac{F_y}{El} + \mu\frac{F_z}{El} \stackrel{!}{=} 0 \tag{12}$$

$$\mu\frac{F_x}{El} + \mu\frac{F_y}{El} - \frac{F_z}{El} \stackrel{!}{=} \Delta l_z \tag{13}$$

bzw.

$$-F_x + \mu F_y + \mu F_z = 0 \tag{14}$$

$$\mu F_x - F_y + \mu F_z = 0 \tag{15}$$

$$\mu F_x + \mu F_y - F_z = \chi \tag{16}$$

mit $\chi := El\Delta l_z$. Durch Subtraktion der beiden homogenen Gleichungen erhält man

$$F_x = F_y \tag{17}$$

Geht man damit wieder in eine der homogenen Gleichungen ein, dann folgt

$$F_x = \frac{\mu}{1-\mu}F_z\ ,\ F_y = \frac{\mu}{1-\mu}F_z \tag{18}$$

Die inhomogene Gleichung wird damit zu

$$-F_z + \frac{2\mu^2}{1-\mu}F_z = \chi \tag{19}$$

woraus sich F_z und damit auch F_x und F_y ergeben:

$$F_x = -\frac{\mu}{(1+\mu)\,(1-2\mu)}\chi \tag{20}$$

$$F_y = -\frac{\mu}{(1+\mu)\,(1-2\mu)}\chi \tag{21}$$

$$F_z = -\frac{\mu-1}{(1+\mu)\,(1-2\mu)}\chi \tag{22}$$

Einsetzen der gegebenen Werte $E = 20\,\mathrm{MPa}$, $\mu = 0{,}45$, $l = 2\,\mathrm{cm}$ und $\Delta l_z = -2\,\mathrm{mm}$ ergibt

$$F_x = 2483\,\mathrm{N}\ ,\ F_y = 2483\,\mathrm{N}\ ,\ F_z = 3034\,\mathrm{N} \tag{23}$$