Lösungen Aufgabenblatt 10

Übungen E1 – Mechanik WS 2017/2018

Dozent: Prof. Dr. Hermann Gaub
Übungsleitung: Dr. Martin Benoit und Dr. Res Jöhr

Verständnisfragen

i.) Gemäß dem Archimedischen Prinzip ist die Auftriebskraft eines Körpers in einem Medium genauso groß wie die Gewichtskraft des vom Körper verdrängten (vdr) Mediums. Im Gleichgewicht gilt daher:

$$\begin{aligned} m_{Eis} \cdot g &= m_{vdr} \cdot g \\ \Leftrightarrow \rho_{Eis} \cdot V_{Eis} &= \rho_{Wasser} \cdot V_{vdr} \\ \Rightarrow \frac{V_{vdr}}{V_{Eis}} &= \frac{\rho_{Eis}}{\rho_{Wasser}} \approx \frac{0.917}{1.000} = 0.917 \end{aligned} \tag{1}$$

Um die Einsinktiefe zu berechnen, bedienen wir uns der Formel für ein Kugelsegment $V_{seg} = \pi h^2 (r - \frac{h}{3})$. Die Höhe der Kugel, welche aus dem Wasser herausragt, kann aus

$$\frac{V_{vdr}}{V_{Eis}} = \frac{V_{Kugel} - V_{seg}}{V_{Kugel}} = 1 - \frac{h^2(3r - h)}{4r^3} = 0.917$$

berechnet werden. Es folgt $h = 0.354\,r$. Somit ist die Einsinktiefe gerade $d = 2r - h = 1.646r$. Bei Sprudel würde das Eis etwas weniger tief eintauchen, da die Blasen für zusätzlichen Auftrieb sorgen.

ii.) Der hydrostatische Druck ist proportional zur Tiefe des Loches in Bezug zur Wasseroberfläche. Die Ausflussgeschwindigkeit des Wassers nimmt deshalb mit größerer Tiefe zu. Die erreichte Weite des Strahls hängt aber von der Geschwindigkeit und der Höhe über dem Boden ab. Für gleiche Ausflussgeschwindigkeiten nimmt die Weite mit der Höhe über dem Boden zu. Daher kommt das Wasser aus dem mittleren Loch am weitesten.

iii.) Die Seife verringert die Oberflächenspannung des Wassers. Damit breitet sich das Wasser weiter auf der Oberfläche aus und der Kontaktwinkel wird kleiner.

iv.) Da Öl hydrophob ist, wird die Kontaktfläche mit dem Wasser minimiert. Der Kontaktwinkel vergrößert sich also im Vergleich zu iii.).

Aufgabe 1 *(Hydrostatischer Druck)*

a) Der hydrostatische Druck im Gehirn der Giraffe ist:

$$\begin{aligned} p_G = p_H - \rho g h &= 34\,000\,\mathrm{Pa} - 1.06 \cdot 10^3 \mathrm{kg/m^3} \cdot 9{,}8\,\mathrm{m/s^2} \cdot 1{,}8\,\mathrm{m} \\ &= 34\,000\,\mathrm{Pa} - 18\,698\,\mathrm{Pa} = 15\,302\,\mathrm{Pa} \end{aligned} \tag{2}$$

b) Der hydrostatische Druck in den Füßen der Giraffe ist

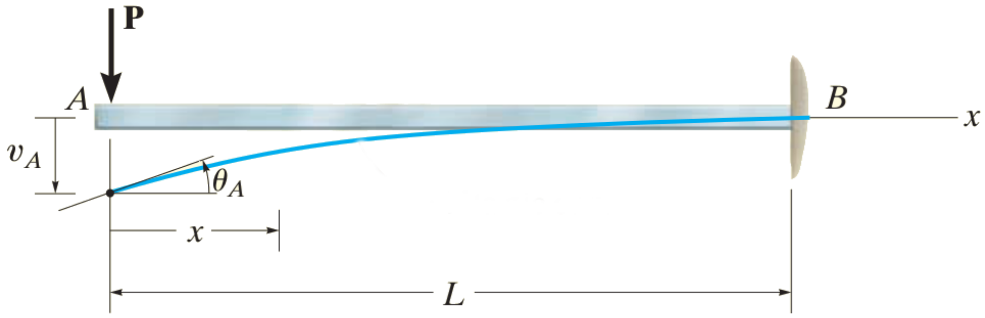
$$\begin{aligned} p_F = p_H + \rho g h &= 34\,000\,\mathrm{Pa} + 1.06 \cdot 10^3 \mathrm{kg/m^3} \cdot 9{,}8\,\mathrm{m/s^2} \cdot 2\,\mathrm{m} \\ &= 34\,000\,\mathrm{Pa} + 20\,776\,\mathrm{Pa} = 54\,776\,\mathrm{Pa} \end{aligned} \tag{3}$$

c) Der Blutdruck würde sich um

$$\Delta p = p_F - p_G = 54\,776\,\mathrm{Pa} - 15\,302\,\mathrm{Pa} = 39\,474\,\mathrm{Pa} \tag{4}$$

erhöhen. Es bleibt zu bemerken, dass der reale Druckanstieg tiefer ist und wohl kaum tödlich wäre. Die Giraffe muss aber diese Stellung beim Trinken einnehmen, da sie sonst das Wasser gar nicht erreichen kann. Die Beine sind 20 cm länger als der Hals. Dies wäre hingegen sehr wohl tödlich.

Aufgabe 2 *(Balkenbiegung)*



a) Aus dem Diagramm lässt sich für das Biegemoment (äußeres Drehmoment) folgendes ableiten (P ist als Kraft eingetragen):

$$M_a(x) = Px \tag{5}$$

(Bemerkung: zur Wahl des Vorzeichens ist zu bedenken, dass x und P als Vektoren aufgefasst werden können.) Dieses muss durch das innere, durch die Biegung erzeugte, Drehmoment im Material M_i, welches durch $EI\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = M_i(x)$ gegeben ist, kompensiert werden. Es muss also $M_a + M_i = 0$ gelten. Daraus folgt:

$$EI\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -Px \tag{6}$$

Zum Lösen der Differentialgleichung, werden beide Seiten erst zweimal nach x integriert. Dies führt zu:

$$EI\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-Px^2}{2} + C_1 \tag{7}$$

$$EIy = \frac{-Px^3}{6} + C_1x + C_2 \tag{8}$$

Die Randbedingungen sind $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ bei $x = L$ und $v = 0$ bei $x = L$. Werden diese auf die Gleichung eq. 7 & eq. 8 angewandt, kommt man auf die Gleichungen:

$$0 = \frac{-PL^2}{2} + C_1 \tag{9}$$

$$0 = \frac{-PL^3}{6} + C_1 L + C_2 \tag{10}$$

Daraus folgt $C_1 = \frac{PL^2}{2}$ und $C_2 = \frac{-PL^3}{3}$.
Einsetzen in eq. 7 & eq. 8 liefert:

$$\theta = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{P}{2EI}(L^2 - x^2) \tag{11}$$

$$y = \frac{P}{6EI}(3L^2x - 2L^3 - x^3) \tag{12}$$

Die maximale Auslenkung bekommt man für den Fall $A(x = 0)$. daraus folgt:

$$\theta_A = \frac{PL^2}{2EI} \tag{13}$$

$$y_A = \frac{-PL^3}{3EI} \tag{14}$$

b) Geometrie **a)**

Der Flächenträgheitsmoment für ein Rechteck bezüglich der gegebenen Achse (hier x-Achse) gilt $I = \frac{1}{12}bh^3$.

Mittels des Satz von Steiner bekommt man für die Rechtecke A,D:

$$\begin{aligned} I_x &= \bar{I}'_x + Ad_y^2 \\ &= \frac{1}{12}(100)(300)^3 + (100)(300)(200)^2\mathrm{mm}^4 \\ &= 1{,}425 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^4 \end{aligned} \tag{15}$$

und für das Rechteck B,

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{1}{12}(600)(100)^3\mathrm{mm}^4 \\ &= 0{,}05 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^4 \end{aligned} \tag{16}$$

Kombiniert man die vorherigen Ergebnisse, kommt man auf ein gesamt Flächenträgheitsmonent bezüglich der x-Achse von:

$$I_x = 2 \times 1{,}425 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^4 + 0{,}05 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^4 = 2{,}9 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^4 \tag{17}$$

Geometrie **b)** Gemäß der Zeichnung wird ein Differenzialelement parallel zur x-Achse gewählt. Dieses hat die infinitesimale Dicke $\mathrm{d}y$, damit ist das Flächenelement $\mathrm{d}A = (100 - x)\,\mathrm{d}y$. Die Integration über y, von $y = 0$, bis 200mm liefert,

$$
\begin{aligned}
I_x &= \int_A y^2 \,\mathrm{d}A = \int_0^{200\mathrm{mm}} y^2(100 - x)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{200\mathrm{mm}} y^2(100 - \frac{y^2}{400})\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{200\mathrm{mm}} (100y^2 - \frac{y^4}{400})\,\mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{100y^3}{3} - \frac{y^5}{2000}\right]_0^{200\mathrm{mm}} \\
&= 107 \times 10^{-6}\mathrm{m}^4
\end{aligned} \tag{18}
$$

c) Bei einem Biegemodul von $E = 200\,\mathrm{GPa}$ und einer Kraft von $P = 1000\,\mathrm{N}$ erhält man durch Einsetzten in die Gleichungen, die in a) für die maximale Ablenkung hergeleitet wurden:

Für die Geometrie a)

$$
\begin{aligned}
y_A &= -\frac{1000 \cdot 10^3 \cdot \mathrm{Nm}^3}{3 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 2.9 \cdot 10^{-3} \cdot \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{m}^4} \\
&= 5{,}747 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}
\end{aligned} \tag{19}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\theta_A &= \frac{1000 \cdot 10^2 \cdot \mathrm{Nm}^2}{2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 2.9 \cdot 10^{-3} \cdot \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{m}^4} \\
&= 8{,}621 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad}
\end{aligned} \tag{20}
$$

Für die Geometrie b)

$$
\begin{aligned}
y_A &= -\frac{1000 \cdot 10^3 \cdot \mathrm{Nm}^3}{3 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 1.07 \cdot 10^{-4} \cdot \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{m}^4} \\
&= 1{,}558 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}
\end{aligned} \tag{21}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\theta_A &= \frac{1000 \cdot 10^2 \cdot \mathrm{Nm}^2}{2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 1.07 \cdot 10^{-4} \cdot \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{m}^4} \\
&= 2{,}336 \times 10^{-3}\,\mathrm{rad}
\end{aligned} \tag{22}
$$

Aufgabe 3 *(Archimedes Prinzip)*

a) Die Auftriebskraft F_A und die Gewichtskraft F_G sind hier im Gleichgewicht, so dass gilt:

$$F_A = F_G \tag{23}$$

Also

$$\rho_{MW} V g = m_E g \tag{24}$$

wobei V das Volumen des verdrängten Meerwassers bezeichnet und m_E die Masse des Eisbergs. Also kann nach L aufgelöst werden:

$$\rho_{MW} Lb(d-h)g = \rho_E Lbdg \tag{25}$$

$$\rightarrow d = \frac{\rho_{MW} h}{\rho_{MW} - \rho_E} = 612\,\mathrm{m} \tag{26}$$

b) Der Schweredruck p_s ist gegeben durch

$$p_S = \rho_{SW} g(h-s) = 5{,}4 \times 10^5\,\mathrm{Pa} \tag{27}$$

Es gilt die Bernoulli-Gleichung sowie die Annahme, dass der statische Druck innen und außen annähernd gleich sind:

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho_{SW} v_{SW}^2 + \rho g s = p_0 + \rho_{SW} g h \tag{28}$$

$$\frac{1}{2}\rho_{SW} v_{SW}^2 = \rho_{SW} g(h-s) = p_S \tag{29}$$

$$\rightarrow v_{SW} = \sqrt{\frac{2p_s}{\rho SW}} = \sqrt{2g(h-s)} = 32{,}8\,\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{30}$$

c) Der Massenstrom I_{SW} ist gegeben durch:

$$I_{SW} = \rho_{SW} v_{SW} q = 3{,}3 \times 10^6\,\mathrm{kg\,s^{-1}} \tag{31}$$

d) Die Rückstoßkraft ist natürlich bestimmt durch die Impulsänderung:

$$F_R = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m v_{SW}) = v_{SW} I_{SW} = 1{,}09 \times 10^8\,\mathrm{N} \tag{32}$$

e) Man verwendet hier das Ergebnis aus d):

$$v_E = at = \frac{F_R}{m} t = \frac{v_{SW} I_{SW} t}{lbd\rho_E} = 1{,}72 \times 10^{-2}\,\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{33}$$

Aufgabe 4 *(Oberflächenspannung)*

a)

$$\mathrm{d}V_1 = 4\pi R^2\,\mathrm{d}R \tag{34}$$

$$\mathrm{d}V_2 = -\,\mathrm{d}V_1 \tag{35}$$

$$\mathrm{d}A = 8\pi R\,\mathrm{d}R \tag{36}$$

$$\rightarrow \mathrm{d}W = -4\pi R^2\,\mathrm{d}R\,(P_1 - P_2) + 8\pi\gamma R\,\mathrm{d}R \tag{37}$$

b) $\mathrm{d}W = 0$ impliziert,

$$0 = -4\pi R^2 \,\mathrm{d}R\,(P_1 - P_2) + 8\pi\gamma R\,\mathrm{d}R \tag{38}$$

Daraus folgt,

$$P_1 - P_2 = \frac{8\pi\gamma R\,\mathrm{d}R}{4\pi R^2\,\mathrm{d}R} \tag{39}$$

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{2\gamma}{R} \tag{40}$$

c)

$$\Delta P = \frac{2 \cdot 72 \times 10^{-3}\,\mathrm{N\,m^{-1}}}{4 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 36\,\mathrm{N\,m^{-2}} = 36\,\mathrm{Pa} \tag{41}$$

Atmosphärendruck P_2 ist

$$P_2 = 101\,325\,\mathrm{Pa} \tag{42}$$

Daraus folgt,

$$P_1 = \Delta P + P_2 = 101\,361\,\mathrm{Pa} \tag{43}$$