Lösungen Aufgabenblatt 11

Übungen E1 – Mechanik WS 2017/2018

Dozent: Prof. Dr. Hermann Gaub
Übungsleitung: Dr. Martin Benoit und Dr. Res Jöhr

Verständnisfragen

i.) Unter Schwebung versteht man eine Schwingung deren Amplitude sinus-förmig moduliert ist. Sie kann mathematisch als Überlagerung (Superposition) zweier Schwingungen beschrieben werden.

ii.) Die erzeugte Schwingung hat eine Phasenverschiebung von

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left\{\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right\}$$

zur anregenden Schwingung. Im Resonanzfall ist sie gerade $-\pi/2$. Sie hinkt also der Anregung hinterher.

iii.) Eine Kinderschaukel lässt sich als parametrischer harmonischer Oszillator beschreiben. Moduliert man den freien Parameter (z.B. Seillänge) mit einer Frequenz welche gerade dem doppelten der Schwingungfrequenz entspricht, lässt sich die Schwingung gezielt anregen.

iv.)
- Die Pendel können miteinander in Phase schwingen. Die ursprüngliche Auslenkung der Pendel ist gleich.
- Die Pendel können entgegengesetzt schwingen, d.h. mit einer Phasenverschiebung π relativ zueinander. Die Pendel sind am Anfang gerade in entgegengesetzter Richtung ausgelenkt.
- Es kann eine Schwebung entstehen bei welcher die Energie eines Pendels nacheinander jeweils auf das andere übertragen wird. Um diesen Fall zu realisieren darf zu Beginn bloss ein Pendel ausgelenkt sein.

Aufgabe 1 *(Gedämpfte Oszillation)*

a.) Aus der Bedingung, dass die gedämpfte Schwingung die Frequenz $\omega' = 0.9\omega_0$ haben soll, lässt sich die Dämpfung $\gamma = \frac{b}{2m}$ bestimmen

$$\omega' = \omega_0 \underbrace{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2}}_{=0.9} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{b}{2m} = 0,436\omega_0$$

Für die Amplitude eines gedämpften Oszillators gilt: $A'(t) = A\mathrm{e}^{-\frac{bt}{2m}}$

Die Amplitude verringert sich pro Periode T um den Faktor

$$\mathrm{e}^{-\frac{b}{2m}t} = \mathrm{e}^{-0,436\omega_0 T} = \mathrm{e}^{-0,436\omega_0\frac{2\pi}{\omega'}} = \mathrm{e}^{-0,436\omega_0\frac{2\pi}{0,9\omega_0}} = \mathrm{e}^{-0,436\frac{2\pi}{0,9}} = 0,0477$$

b.) Die Energie einer Schwingung ist proportional zum Quadrat der Amplitude. Es gilt daher:

$$E \sim A^2 \Rightarrow E' = 0,0477^2 E$$

Die Energie fällt pro Periode T um den Faktor 0,00227. Oder anders ausgedrückt sie verringert sich um 99,773 %.

c.) Die Güte Q eines Oszillators ist definiert durch $Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}$ wobei $\gamma = \frac{b}{2m}$ für unseren Fall gem. Teilaufgabe a.) gerade $\gamma = 0.436\omega_0$ ist. Daraus folgt

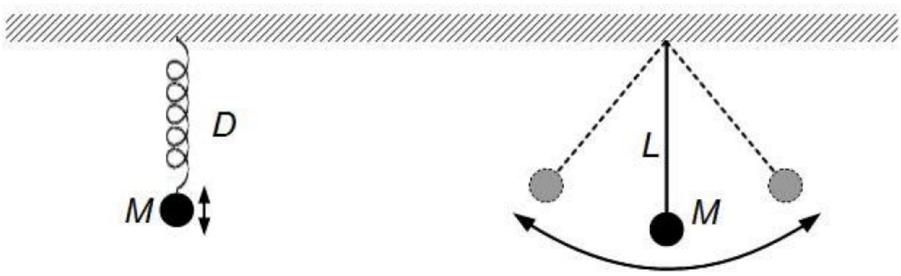
$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{1}{2 \cdot 0,436} = 1,15$$

Die Anzahl Schwingungen, welche der Oszillator macht bis die Energie auf 1/e abgefallen ist, ist dann:

$$N_s = \frac{Q}{2\pi} = 0,18$$

Aufgabe 2 *(Träges Pendel)*

Ein Federpendel mit Federkonstante D und ein Fadenpendel mit einem masselosen Faden der Länge L sollen synchronisiert werden. Beide Kugeln haben dieselbe Masse M.



a) Stellen Sie die Differenzialgleichung für das Federpendel auf. Lösen Sie diese durch Ansatz einer Cosinusfunktion und geben Sie die Kreisfrequenz ω der Schwingung an.

b) Wie lautet die Kreisfrequenz ω für das Fadenpendel mit Punktmasse im Schwerefeld mit Erdbeschleunigung g (in Kleinwinkelnäherung)?

c) Welche Fadenlänge muss bei gegebener Federkonstante D gewählt werden, damit die Kreisfrequenzen gleich sind?

d) Betrachten wir nun die gleiche Situation für Kugeln mit endlichem Radius R. Wie ändert sich dadurch die Kreisfrequenz des Federpendels?

e) Bei welchem Kugelradius schwingt das Fadenpendel bei gleicher Fadenlänge (bis zum Mittelpunkt der Kugel) um 1 Prozent langsamer als das Federpendel?

(Hinweis: Die Kreisfrequenz des physikalischen Pendels ist $\omega = \sqrt{\frac{Mgd_s}{I}}$ wobei d_s der Abstand des Aufhängepunkts vom Schwerpunkt und I das Trägheitsmoment bezüglich des Aufhängepunkts ist. Das Trägheitsmoment einer homogenen Vollkugel beträgt $I_K = \frac{2}{5}MR^2$).

Lösung:

a.) Zum Aufstellen der Differentialgleichung benötigen wir nur die rücktreibende Kraft $F = -Dx$, wobei x die Auslenkung aus der Ruhelage darstellt, sowie das zweite Newton'sche Gesetz.

$$F = Ma = M\ddot{x} = -Dx \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{D}{M}x$$

Als Lösungsansatz wählen wir $x(t) = A\cos(\omega t)$. Einsetzen ergibt dann

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2\cos(\omega t) = -\omega^2 x(t).$$

Daraus folgt unmittelbar, dass $\omega = \sqrt{\frac{D}{M}}$.

b.) In der Kleinwinkelnäherung ist die Kreisfrequenz des Pendels durch $\omega = \sqrt{\frac{Mgd_s}{I}}$ gegeben. Beim Fadenpendel mit Punktmasse M ist $I = ML^2$ und $d_s = L$. Somit folgt $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$.

c.) Die beiden Kreisfrequenzen aus den vorhergehenden Teilaufgaben müssen gleich sein. Es folgt somit

$$\frac{D}{M} = \frac{g}{L} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{Mg}{D}.$$

d.) Beim Federpendel hat die Grösse der Kugel keinen Einfluss auf die Kreisfrequenz (solange die Masse sich nicht ändert).

e.) Durch die Verteilung der Masse auf eine Kugel mit Radius R wird das Trägheitsmoment bezüglich des Aufhängepunkts vergrössert von ursprünglich $I = ML^2$ auf $I' = I_K + ML^2$ (Satz von Steiner). Einsetzen des Trägheitsmomentes $I_K = \frac{2}{5}MR^2$ für eine Vollkugel liefert $I' = M(\frac{2}{5}R^2 + L^2)$. Somit erhält man die Kreisfrequenz des Pendels zu

$$\omega_{Faden} = \sqrt{\frac{Mgd_s}{I'}} = \sqrt{\frac{Mgd_s}{M\left(\frac{2}{5}R^2 + L^2\right)}}$$

Aus der Bedingung $0.99\,T_{Faden} = T_{Feder}$ folgt dass $\frac{\omega_{Faden}}{\omega_{Feder}} = 0.99$. Einsetzen der Formeln für die Kreisfrequenzen führt auf

$$\frac{D}{M} = \frac{gL}{(0,99)^2\left(\frac{2}{5}R^2 + L^2\right)}.$$

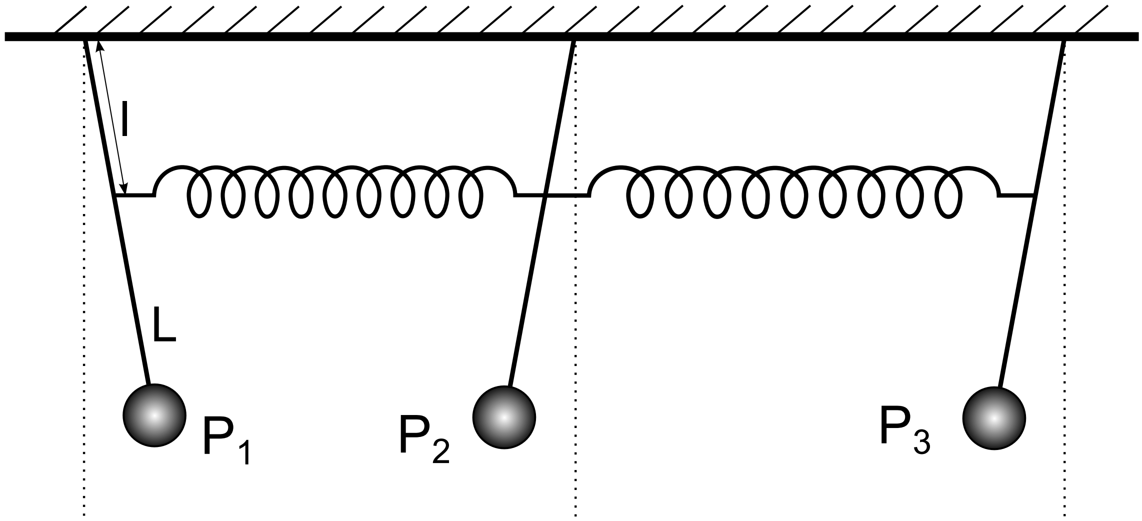
Auflösen nach R gibt:

$$R^2 = \sqrt{\frac{5}{2}\left(\frac{gLM}{(0,99)^2 D} - L^2\right)}.$$

Aufgabe 3 *(Gekoppeltes Pendel)*

Drei identische mathematische Pendel der Länge L und Masse m werden in einer Reihe angeordnet. Die benachbarten Pendel werden jeweils durch masselose Federn mit der Federkonstante k gekoppelt. Die Federn sind jeweils Abstand l zum Aufhängepunkt angebracht. Berechnen Sie die Eigenfrequenzen und geben Sie die Eigenschwingungen an. Verwenden Sie für die ganze Aufgabe die Kleinwinkelnäherung.

a.) Stellen Sie die drei gekoppelten Differentialgleichungen für die einzelnen Pendel auf. Die Auslenkung aus der Gleichgewichtslage sei jeweils ϕ_ν, mit $\nu \in [1, 2, 3]$. Beachten Sie hierfür für jedes einzelne Pendel den Einfluss der Gravitation sowie die Wechselwirkung über die angehängte(n) Feder(n).



b.) Stellen Sie Differentialgleichungen in Matrixschreibweise $\ddot{\vec{\phi}} = \underline{A}\,\vec{\phi}$ dar.
Führen Sie hierzu die folgenden Konstanten ein:

$$\omega_0^2 := \frac{g}{L}$$

$$\kappa := \frac{kl^2}{mL^2}$$

Die einzelnen Einträge der Matrix $\underline{A}$ lassen sich als Linearkombination der neuen Konstanten ω_0^2 und κ darstellen.

c.) Verwenden Sie den Ansatz $\phi_\nu = \hat{\phi}_\nu e^{i\omega t}$ und setzen Sie diesen in die Gleichung ein. Durch Umstellen erhalten Sie eine Gleichung folgender Art:

$$\vec{0} = \underline{B}\hat{\vec{\phi}}$$

Lösung:

a.) Die Schwingung eines Pendels resultiert aus einem wirkenden Drehmoment. In diesem Fall wird es durch die Gravitations- sowie die Federkraft verursacht. Um die Differentialgleichungen aufzustellen müssen wir also gerade dieses Drehmoment betrachten. Wenn wir das erste Pendel leicht auslenken so wirken auf dieses die folgende Drehmomente:

$$\begin{aligned} M_g &= L \times F_g = -L \sin\phi_1 mg \approx -L\phi_1 mg, \\ M_k &= l \times F_k = l\cos\phi_1 \cdot (-kl(\sin\phi_1 - \phi_2)) \approx -kl^2(\phi_1 - \phi_2). \end{aligned}$$

Dabei haben wir jeweils die Kleinwinkelnäherung für die trigonometrischen Ausdrücke verwendet. Für das Gesamtdrehmoment lässt sich also schreiben:

$$M_{tot} = I\ddot{\phi}_1 = -L\phi_1 mg - kl^2(\phi_1 - \phi_2).$$

Basierend auf diesen Überlegungen lassen sich nun die DGL für $N = 3$ aufstellen:

$$\begin{aligned} I\ddot{\phi}_1 &= -Lmg\phi_1 - kl^2(\phi_1 - \phi_2), \\ I\ddot{\phi}_2 &= -Lmg\phi_2 - kl^2(\phi_2 - \phi_3) + kl^2(\phi_1 - \phi_2) \\ &= -Lmg\phi_2 + kl^2\phi_1 - 2kl^2\phi_2 + kl^2\phi_3, \\ I\ddot{\phi}_3 &= -Lmg\phi_3 - kl^2(\phi_3 - \phi_2). \end{aligned}$$

d.h.
an Pendel 1 zieht Pendel 2 mit ϕ_2
an Pendel 3 zieht Pendel 2 mit ϕ_2
an Pendel 2 zieht Pendel 1 und 3 mit ϕ_2 und ϕ_3

b.) Verwenden wir die folgenden Ausdrücke, so lassen sich die Gleichungen in eine übersichtliche Matrixgleichung überführen.

$$I := mL^2 \qquad \omega_0^2 := \frac{g}{L} \qquad \kappa := \frac{kl^2}{mL^2}$$

(L: Bahn der Pendelmassen, l: Abstand zwischen Aufhängung und Pendelmasse)

$$\begin{pmatrix}\ddot{\phi}_1\\ \ddot{\phi}_2\\ \ddot{\phi}_3\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}-\omega_0^2-\kappa & \kappa & 0\\ \kappa & -\omega_0^2-2\kappa & \kappa\\ 0 & \kappa & -\omega_0^2-\kappa\end{pmatrix}}_{=\underline{A}}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{pmatrix}$$

c.) Mit $\phi_\nu = \hat{\phi}_\nu e^{i\omega t}$ lässt sich die Linke Seite aus b.) durch $\ddot{\vec{\phi}} = -\hat{\vec{\phi}} \cdot \omega^2 E$ ausdrücken, wobei E die Einheitsmatrix ist. Umstellen der Lösung aus b) ergibt dann $0 = (A + \omega^2 E)\hat{\vec{\phi}}$. Oder vollständig ausgedrückt:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\omega^2-\omega_0^2-\kappa & \kappa & 0\\ \kappa & \omega^2-\omega_0^2-2\kappa & \kappa\\ 0 & \kappa & \omega^2-\omega_0^2-\kappa\end{pmatrix}}_{=\underline{B}}\begin{pmatrix}\hat{\phi}_1\\ \hat{\phi}_2\\ \hat{\phi}_3\end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 *(Getriebener harmonischer Oszillator)*

Ein harmonischer Oszillator (HO) ist gegeben, wenn auf eine Masse m eine rückstellende Kraft $F = -kx$ entgegengesetzt zur Auslenkung wirkt. Beim gedämpften, getriebenen HO wirkt zusätzlich Reibung, welche proportional zur Geschwindigkeit ist $F = -b\dot{x}$ sowie eine periodische Kraft mit Frequenz ω, welche den HO antreibt.

a.) Leiten Sie aus diesen Annahmen die Differentialgleichung für einen getriebenen harmonischen Oszillator her. Tipp: Um später einen komplexen Lösungsansatz verwenden zu können, müssen Sie auch die antreibende Kraft komplex formulieren.

Lösung: Die auf den Oszillator wirkende Gesamtkraft ist die Summe der einzelnen Teilkräfte, wie sie in der Aufgabenstellung erwähnt wurden. Es folgt daraus

$$F_{tot} = \sum_i F_i = F_0 e^{i\omega t} - Dx - b\dot{x}$$

Analog zu Aufgabe 1 folgt mit $m\ddot{x} = F_{tot}$, dass

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + Dx = F_0 e^{i\omega t}$$

Nebenbemerkung: Unter Verwendung von $\gamma = \frac{b}{2m}$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$ und $\kappa = \frac{F_0}{m}$ lässt sich diese in die bekannte Form

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \kappa e^{i\omega t}$$

überführen.

b.) Nutzen Sie den Ansatz $x = A(\omega)\mathrm{e}^{i(wt+\varphi)}$ um die Differentialgleichung zu lösen und finden Sie einen Ausdruck für $A(\omega)$ und $\varphi(\omega)$.

Lösung: Einsetzen des Ansatzes $x = A(\omega)\mathrm{e}^{i(wt+\varphi)}$ führt auf

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \kappa e^{i\omega t}$$

$$\begin{aligned} -\omega^2 A(\omega)\mathrm{e}^{i(wt+\varphi)} + 2\gamma i\omega A(\omega)\mathrm{e}^{i(\omega t+\varphi)} + \omega_0^2 A(\omega)\mathrm{e}^{i(wt+\varphi)} &= \kappa e^{i\omega t} \\ \left(-\omega^2 + 2\gamma i\omega + \omega_0^2\right) \underbrace{A(\omega)\mathrm{e}^{i(\omega t+\varphi)}}_{x(t)} &= \kappa e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Auflösen nach $x(t)$ gibt

$$x(t) = \frac{\kappa}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\gamma i\omega}\mathrm{e}^{i\omega t}.$$

Wir stellen fest, dass die Amplitude komplex ist. Dies ist insofern einleuchtend da sie ja die Phasenverschiebung φ beinhalten muss. Dieser Sachverhalt legt nahe die Amplitude in die Form $A = a\mathrm{e}^{i\varphi}$ zu bringen. Unter Berücksichtigung, dass alle verwendeten Variablen (außer A) reell sind (d.h. man braucht lediglich den Nenner umzuformen), folgt

$$x(t) = \frac{\kappa}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}\mathrm{e}^{i\left(\omega t - \arctan\left\{\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right\}\right)}$$

Daraus lassen sich die geforderten Ausdrücke gerade ablesen.

$$A(\omega) = \frac{\kappa}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}, \qquad \varphi(\omega) = -\arctan\left\{\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right\}$$

Wie gewünscht, erfüllt das erhaltene $x(t)$ die ursprüngliche Form des Ansatzes.

c.) Geben Sie eine Formel für die Resonanzfrequenz an.

Lösung: Für die Resonanzfrequenz ω_{res} gilt $\max(A) = A(\omega_{res})$. Um diese zu bestimmen sucht man am einfachsten nach dem Minimum des Nenners.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\omega}((\omega_0^2 - \omega_{res}^2)^2 + (2\gamma\omega_{res})^2) &= 0 \\ 2(\omega_0^2 - \omega_{res}^2)(-2\omega_{res}) + 8\gamma^2\omega_{res} &= 0 \\ (\omega_0^2 - \omega_{res}^2 - 2\gamma^2)\omega_{res} &= 0 \end{aligned}$$

Da $\omega = 0$ aus offensichtlichen Gründen nicht die Lösung für die maximale Amplitude sein kann, muss $\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$ die Lösung sein.