Lösungen Aufgabenblatt 12

Übungen E1 – Mechanik WS 2017/2018

Dozent: Prof. Dr. Hermann Gaub
Übungsleitung: Dr. Martin Benoit und Dr. Res Jöhr

Verständnisfragen

i.) ideales Gas

Die Gasteilchen haben kein Eigenvolumen, der Teilchenabstand ist sehr viel größer als die Teilchengröße, Wechselwirkungen werden nur durch elastische Stöße beschrieben (nicht durch Kräfte zwischen den Teilchen), die Teilchen folgen einer statistischen Geschwindigkeitsverteilung (der sog. Maxwell-Boltzmann-Verteilung)

ii.) flüssiges Wasser

Schätzung des Abstandes:
$M(H_2O) = 18u = 29,88 \cdot 10^{-27}kg, 1l = 1dm^3 = 10^{24}nm^3$
Anzahl der Moleküle pro kg: $\frac{1kg}{29,88 \cdot 10^{-27}kg} = 3,347 \cdot 10^{25}$
1l Wasser wiegt ca. 1kg, in einem kg Wasser sind $3,347 \cdot 10^{25}$ Moleküle. Nun teilen wir das Volumen in Würfel um die einzelnen Atome auf:
$\frac{10^{24}nm^3}{3,347 \cdot 10^{25}} = 0,029nm^3 \Rightarrow a = \sqrt[3]{0,029nm^3} = 0,310nm$
Der Abstand ist also nur unwesentlich größer als die Teilchengröße ($r_{Wasser} = 0,14nm$)

Teilchen wechselwirken auch ohne Stöße (Dipole), Teilchengröße ist nicht viel kleiner als Teilchenabstand

iii.) Wellenarten

Bei Longitudinalwellen findet die Schwingung in der Richtung statt, in die sich die Welle bewegt. Bsp.: Schall in Luft, Flüssigkeiten oder Festkörpern.

Transversalwellen bewegen sich in eine Richtung senkrecht zur in ihnen stattfindenden Oszillation. Bsp.: Saiten, Elektromagnetische Wellen, transvers. Wellen in Festkörpern.

iv.) Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Mit der Phasengeschwindigkeit breiten sich Orte gleicher Phase in einer Welle aus.

$v_{ph} = \omega/k = \lambda/f$

Ist eine Welle eine Überlagerung mehrerer verschiedener Wellen, so besitzen diese auch verschiedene Phasengeschwindigkeiten. Die Gruppengeschwindigkeit ist dann die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Einhüllenden, gegeben als $v_{gr} = \frac{d\omega(k)}{dk} = \frac{d(v_{ph}k)}{dk} = v_{ph} + \frac{dv_{ph}}{dk}k$.

Für $v_{ph} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$ mit $\frac{d\lambda}{dk} = \frac{d}{dk}(\frac{2\pi}{k}) = -\frac{2\pi}{k^2}$ gilt:

$$v_{gr} = v_{ph} + \frac{dv_{ph}}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dk}k = v_{ph} - \frac{dv_{ph}}{d\lambda}\frac{2\pi}{k} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \frac{1}{2}v_{ph}.$$

Aufgabe 1 Gasballon

a) Boyle-Mariotte: $p_0V_0 = p_{max}V_{max}$ und $p_{max} = p_0\frac{V_0}{V_{max}}$. Wegen konstanter Temperatur gilt Boyle Mariotte und wir verwenden die daraus abgeleitete Barometrische Höhenformel:

$$p(h) = p_0 e^{-\frac{\rho_{0_{Luft}} gh}{p_0}}$$

$$p_{max} = p_0\frac{V_0}{V_{max}} = p_0 e^{-\frac{\rho_{0_{Luft}} gh_{prall}}{p_0}}$$

$$h_{prall} = -\frac{p_0}{\rho_{0_{Luft}} g} ln\frac{V_0}{V_{max}} = \frac{p_0}{\rho_{0_{Luft}} g} ln\frac{V_{max}}{V_0}$$

b) Maximale Höhe bei $F_{Auftrieb} = F_G$ (Dichte der Luft nimmt ab) und es muss gelten:

$$\rho_{0_{Luft}} e^{-\frac{\rho_{0_{Luft}} gh_{max}}{p_0}} V_{max} g = (m_B + m_N + \rho_{0_{Gas}} V_0)g$$

Da kein Gasaustausch stattfindet, bleibt die Masse des im Ballon enthaltenen Gases konstant. Die Auftriebskraft berechnet sich aus der Gewichtskraft der verdrängten Luft, deren Dichte folgt derselben Höhenformel wie der Druck:

$$h_{max} = \frac{p_0}{\rho_{0_{Luft}} g} ln\frac{\rho_{0_{Luft}} V_{max}}{m_B + m_N + \rho_{0_{Gas}} V_0}$$

c) durch Substitution von $\dfrac{m}{2k_BT} = a$ wird $f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}a^{\frac{3}{2}}v^2e^{-av^2}$. Durch Ableiten nach v und Nullsetzen ergibt sich $v = \sqrt{\frac{2k_BT}{m}}$.

d)

$$\overline{v} = \int_0^\infty v \cdot f(v)dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}}a^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty v^3e^{-av^2}dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}}a^{\frac{3}{2}}\frac{a^{-2}}{2} = \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}}$$

e) Da wir annahmen T sei konstant gilt $Nk_BT = p_0V_0 = p_{max}V_{max}$. Für alle Höhen ist die nur von der Temperatur abhängige Geschwindigkeitsverteilung identisch, also ist $\overline{v}_{h_0}/\overline{v}_{h_{max}} = 1$.

Aufgabe 2 Doppler Effekt

a) Der Student hört die Frequenz $f' = \frac{f_0}{1+\frac{u}{v}}$

Es folgt $u = v(\frac{f_0}{f'} - 1) = 34\frac{m}{s}$

Diese Geschwindigkeit wird erreicht in der Zeit $t = \frac{u}{g} = 3,47s$, in der die Stimmgabel $58,9m$ tief fällt. Bis der Student den Schall hören kann, muss dieser den Weg durch den Aufzugschacht nach oben zurücklegen. Die dazu benötigte Zeit ist $t = \frac{58,9m}{340\frac{m}{s}} = 0,173s$. Also hört er $3,64s$ nach dem Loslassen die Frequenz $400Hz$. In dieser Zeit ist die Stimmgabel $65,0m$ tief gefallen.

b) i.) Für einen ruhenden Beobachter (b) gilt bei einer auf ihn zu bewegenden Signalquelle (z):

$$f_b = \frac{f_z}{1 - \frac{v_z}{c}}$$

wobei f_z die ausgesandte Frequenz der Signalquelle und c die Schallgeschwindigkeit ist.

Entfernt sich die Signalquelle gilt:

$$f_b' = \frac{f_z}{1 + \frac{v_z}{c}}$$

Daraus folgt:

$f_z = f_b(1 - \frac{v_z}{c})$
$f_b' = f_b \frac{1 - \frac{v_z}{c}}{1 + \frac{v_z}{c}}$
$f_b'(1 + \frac{v_z}{c}) = f_b(1 - \frac{v_z}{c})$
$\frac{v_z}{c}(f_b' + f_b) = f_b - f_b'$
$v_z = c\frac{f_b - f_b'}{f_b' + f_b} = 340\frac{m}{s}\frac{160Hz}{1600Hz} = 34\frac{m}{s}$

Der Zug bewegt sich mit $34\frac{m}{s}$ bzw. $122,4\frac{km}{h}$.

ii.) Sind sowohl Beobachter (b) als auch Signalquelle (z) in Bewegung und bewegen sich diese voneinander weg gilt:

$$f_b' = f_z \frac{1 - \frac{v_b}{c}}{1 + \frac{v_z}{c}} = f_z \frac{c - v_b}{c + v_z} = 792Hz \frac{340\frac{m}{s} - \frac{50}{3.6}\frac{m}{s}}{340\frac{m}{s} + 34\frac{m}{s}} = 792Hz \frac{326.11\frac{m}{s}}{374\frac{m}{s}} \approx 691Hz.$$

Aufgabe 3 Töne in einer Glasflasche

a) i.) Der geöffnete Flaschenboden stellt für die wellenförmige Teilchenbewegung ein offenes Ende dar, die Welle wird also ohne Phasensprung ($\phi = 0$) aber mit umgekehrter Wellenzahl k reflektiert. Mit dem Additionstheorem $\sin(\alpha) \pm \sin(\beta) = 2\sin(\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta))\cos(\frac{1}{2}(\alpha \mp \beta))$ gilt:

$$\psi(x,t) = \psi_0 \sin(kx + \omega t) + \psi_0 \sin(-kx + \omega t + \phi) = 2\psi_0 \sin(\omega t)\cos(kx).$$

Dies entspricht einer stehenden Welle. Nun sind beide Flaschenöffnungen offene Enden, die Teilchengeschwindigkeit weist in beiden Fällen Schwingungsbäuche auf. Der Kosinus-Term stellt die Einhüllende der Schwingung dar, er muss für $x = 0$ und $x = L$ also 1 oder -1 sein. Im ersten Fall ist dies stets erfüllt, im zweiten führt die Bedingung auf:

$$kL = n\pi \Leftrightarrow f_n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{ck}{2\pi} = \frac{nc}{2L}, n \in \mathbb{N}.$$

ii.) Ist der Flaschenboden geschlossen, so befindet sich dort ein festes Ende für die Teilchenbewegung. Die Welle wird dort mit Phasensprung $\phi = \pi$ reflektiert, was ihr Vorzeichen umdreht. Das Additionstheorem liefert für die überlagerte Welle:

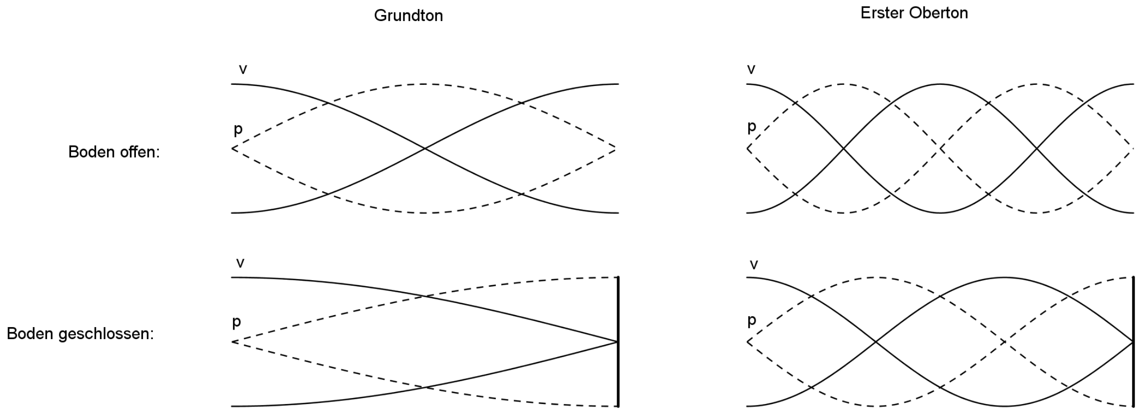
$$\psi(x,t) = \psi_0 \sin(kx + \omega t) - \psi_0 \sin(-kx + \omega t) = 2\psi_0 \sin(kx)\cos(\omega t).$$

Dies ist eine stehende Welle mit einem Schwingungsknoten bei $x = 0$, was der Tatsache entspricht, dass es direkt am Flaschenboden keine Teilchenbewegung gibt. Bei $x = L$ liegt wie in i.) ein offenes Ende und somit ein Schwingunsbauch, d.h. der Sinusterm muss dort 1 oder -1 annehmen. Dies führt auf die Resonanzfrequenzen:

$$kL = (n - 1/2)\pi \Leftrightarrow f_n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{ck}{2\pi} = \frac{(n - 1/2)c}{2L}, n \in \mathbb{N}.$$

b) An der Flaschenöffnung liegt ein Schwingungsbauch der Teilchengeschwindigkeit, am Flaschenboden ein Bauch bei i.) und ein Knoten bei ii.)

Für den Druck gelten genau umgekehrte Randbedingungen: An Öffnungen entspricht er stets dem Aussendruck, dort liegen also Schwingungsknoten. Am geschlossenen Flaschenboden kann er seine Maximalwerte annehmen, dort liegt ein Schwingungsbauch. Dies sind die Verläufe von Druck und Geschwindigkeit bei den zwei niedrigsten Resonanzfrequenzen:



c) Durch Füllen der Flasche mit Wasser lässt sich die Länge der Luftsäule anpassen, sodass

$$f_1 = \frac{(1-1/2)c}{2L} = \frac{c}{4L} \stackrel{!}{=} 440\text{Hz} \Leftrightarrow L_{Luft} = \frac{c}{4f_1} = \frac{\lambda}{4} = 19,3\text{cm}.$$

Die dafür benötigte Menge Wasser berechnet sich als:

$$V_{H_2O} = AL_{H_20} = \pi r^2(L - L_{Luft}) = 839\text{ml}.$$

Aufgabe 4 Gitarrenkonzert

a) An beiden Enden sind die Saiten fest eingespannt, dort liegen also jeweils Schwingungsknoten. Zur Ausbildung von stehenden Wellen auf den Saiten muss deren Länge also ein Vielfaches der halben Wellenlänge sein, womit gilt:

$$L = \frac{n\lambda}{2} \Leftrightarrow f = v_{ph}/\lambda = \frac{nv_{ph}}{2L}.$$

Für den Grundton wählen wir $n = 1$, die Längendichte entspricht dem Produkt aus Dichte und Querschnitsfläche da letztere konstant ist:

$$f = \frac{v_{ph}}{2L} = \frac{\sqrt{F/\mu}}{2L} = \frac{\sqrt{\frac{F}{\pi R^2 \rho}}}{2L} = 114\text{Hz}.$$

b) Wir wählen zur Darstellung der Welle $y(x,t) = y_0 \sin(kx)\cos(\omega t)$, wobei im von x abhängigen Term nur der Sinus die Randbedingungen $y(0) = y(L) = 0$ erfüllt, der von t abhängige Term kann auch mit einem Sinus geschrieben werden. Für ein Teilstück berechnet sich die Energie dE nach der bekannten Formel $E = 1/2mv^2$:

$$dE = \frac{1}{2}dmv^2 = \frac{1}{2}dm\dot{y}^2 = \frac{1}{2}\rho\pi R^2\dot{y}^2dx = \frac{1}{2}\rho\pi R^2\omega^2y_0^2\sin^2(\omega t)\sin^2(kx)dx.$$

Gemittelt über die Zeit geht $\sin^2(\omega t)$ gegen $1/2$. Aus (a) folgt:

$$\omega = 2\pi f = \pi v_{ph}/L$$

$$k = \omega / v_{ph} = \pi / L$$

$$\int_0^L \sin^2(\pi x/L)dx = \int_0^L 1/2dx = L/2,$$

womit für die Energie der gesamten Saite gilt:

$$E = \int dE = \int_0^L \frac{1}{4}\rho\pi R^2\omega^2 y_0^2 \sin^2(kx)dx = \frac{1}{4L^2}\rho\pi R^2\pi^2 v_{ph}^2 y_0^2 \int_0^L \sin^2(\pi x/L)dx$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho\pi R^2 L\pi^2 v_{ph}^2 y_0^2}{8L^2} = \frac{M\pi^2 v_{ph}^2 y_0^2}{8L^2}.$$

c) Es kommt abwechselnd zu destruktiver und konstruktiver Interferenz: Die Lautstärke wechselt also zwischen 0 und einem Maximalwert. Dieser kommt dann zustande, wenn die Wellen von beiden Gitarren mit einem Phasenunterschied interferieren, der ein geradzahliges Vielfaches von π ist, beim Minimum dagegen ein ungeradzahliges Vielfaches von π. Daraus folgt für den Weglängenunterschied:

$$\Delta x = \frac{\Delta\phi}{k} = \frac{c\Delta\phi}{\omega} = \frac{2\pi nc}{2\pi f} = \frac{nc}{f} = (3n)\text{m}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_1 = 0,5\text{m}, x_2 = 2\text{m}, x_3 = 3,5\text{m}.$$

Damit kommt es an genau drei Orten zwischen den Spielern zu einer maximalen Lautstärke: Jeweils in einem Abstand von $0,5$m von jedem Spieler und in der Mitte, da dort der Phasenunterschied 0 bzw. 2π ist.

d) Im realen Experiment muss berücksichtigt werden, dass die von den Gitarren ausgesandten Wellen nicht kohärent sind: Sie weisen eine in der Zeit veränderliche Phasenverschiebung zueinander auf, womit Interferenzeffekte verringert werden oder sogar ganz verschwinden. Außerdem müssen auch Reflexionen an den Wänden berücksichtigt werden: Dadurch kommen an den vermeintlichen Orten mit Interferenz auch Schallwellen mit anderen Weglängen an. Es wird also in der Realität keine Orte geben, an denen die Amplitude ganz verschwindet, und ebenso wird die konstruktive Interferenz die Amplitude nirgendwo verdoppeln.