Lösungen Aufgabenblatt 13

Übungen E1 – Mechanik WS 2017/2018

Dozent: Prof. Dr. Hermann Gaub
Übungsleitung: Dr. Martin Benoit und Dr. Res Jöhr

Verständnisfragen

i.) Mit steigender Temperatur wird die Verteilung breiter und flacher (siehe: Figur 1). Es erreichen demach bei höheren Temperaturen mehr Teilchen höhere Geschwindigkeiten. Da ein breiterer Bereich an Geschwindigkeiten abgedeckt wird, flacht die Kurve auf Grund der Normierungsbedingung ab. Entscheidend ist jedoch der Anstieg der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v}$. Da die Masse der Teilchen invers zur Temperatur in die Formel der Verteilung eingeht, verhält die Verteilung sich genau umgekehrt. D.h. m_1(vormals T_1)$> m_2 > m_3$. (m_i gehört zu Kurve T_i) Schwere Teilchen bewegen sich langsamer.

ii.) das Wasserstoffmolekül ist deutlich leichter und daher im Mittel schneller als das Argonatom:

$$v = \sqrt{\frac{8k_bT}{\pi m}}.$$

dennoch gewinnt das Argonatom im Mittel auch einige male aus mehreren Gründen, einmal ist die Geschwindigkeitsverteilung (siehe i) ja so, dass das Wasserstoffmolekül in eineigen Fällen durchaus langsamer fliegen kann zum anderen kann das Argonatom zufällig schon nach wenigen Stößen mit den Gasatomen an der anderen Gefäßseite sein während das Wasserstoffatom noch einigemale irgendwo anders hin und her gestoßen wird...

iii.)

$$\lambda = \frac{1}{n \cdot \sigma}$$

Mit $n = \frac{N}{V}$ und dem idealen Gasgesetz $pV = Nk_BT$ wird

$$\lambda = \frac{V}{N\sigma} = \frac{k_BT}{p\sigma}$$

Für den Wirkungsquerschnitt gilt $\sigma \sim d^2$. (Im idealen Gas werden die Teilchen eigentlich als punktförmig angenommen, aber die Annahme eines idealen Gases ist trotzdem gerechtfertigt, solange $d \ll x$ mit dem mittleren Teilchenabstand x)

Aufgabe 1 *(Diffusionsgleichung)*

Diffusion (oder Wärmeleitung) wird allgemein mittels folgender Differentialgleichung beschrieben:

$$\frac{\partial}{\partial t}c(x,t) = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}c(x,t).$$

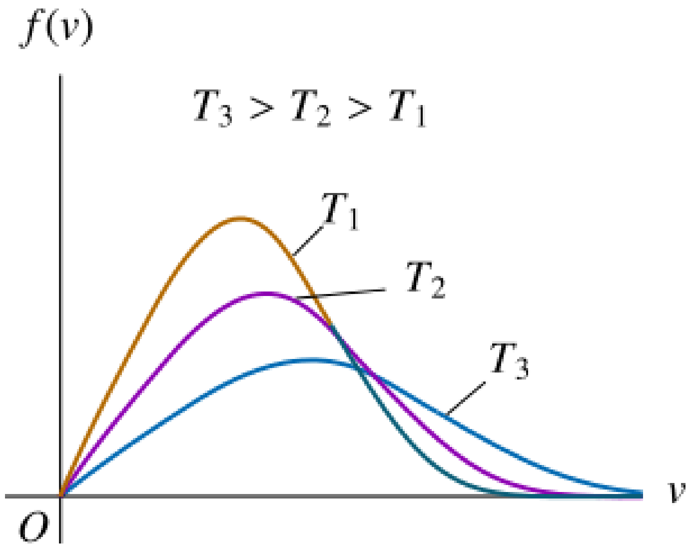

Figure 1

Dabei sei c die Konzentration der diffundierenden Teilchen und D deren Diffusionskoeffizient. Betrachten Sie nun den Fall eines Rohres, in welchem die Teilchen von einer Quelle am Anfang des Rohres ($x = 0$) zum anderen Ende $x = d$ diffundieren. Der Zufluss durch die Quelle sei gerade so, dass $c(0, t) = N$ für alle t. Am Ende des Rohres fließen die Teilchen durch einen Filter, welcher den Teilchenfluss begrenzt. Betrachten Sie nun den stationären Fall, in welchem der Fluss durch den Filter gerade $J(d, t) = n$=konstant sei. Lösen sie für diesen Fall die Diffusionsgleichung und geben Sie eine Gleichung für die Konzentrationsverteilung $c(x)$ im Rohr an.

Lösung: Wir betrachten den stationären Fall. Somit vereinfacht sich die Differentialgleicung zu

$$0 = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}c(x, t).$$

Die allgemeine Lösung finden wir durch zweimaliges Integrieren.

$$c(x, t) = \int\int dxdx = ax + b$$

Die spezifische Lösung finden wir durch Einsetzen der Randbedingungen. Die erste Randbedingung lautet $c(0, t) = N$. Für die zweite verwenden wir das Fick'sche Gesetz und erhalten

$$J(d, t) = n = -Dc'(d, t) \quad \Rightarrow \quad c'(d, t) = -\frac{n}{D}.$$

Somit folgt direkt, dass $b = N$ und $a = -\frac{n}{D}$. Die Konzentrationsverteilung lautet also

$$c(x, t) = -\frac{n}{D}x + N.$$

Aufgabe 2 *(Bernoulli-Gleichung)*

Ein Winzer hat im Keller ein Weinfass mit Höhe $2,20m$, gefüllt mit Most. Um den Most zukosten, öffnet er den Hahn am Fass. Der Hahn endet $20cm$ über dem Fassboden. Das Fass ist belüftet, d.h. der Außendruck ist gleich dem Druck auf der Oberfläche (Atmosphärendruck) des Mostes. Die Dichtes des Mostes sei gleich der des Wassers, d.h. $\rho = 1g/cm^3$.

a) Mit welcher Geschwindigkeit strömt der Most aus dem Hahn?

Lösungsvorschlag:
Die Ausströmgeschwindigkeit wird durch zweimalige Anwendung der Bernoulli-Gleichung bei der Höhe $h_0 = 2,20m$ und bei der Höhe $h_1 = 0,20m$ ermittelt. Die zu den Bernoulli-Gleichungen gehörenden Geschwindigkeiten sind $v_0 = 0\frac{m}{s}$ bei der Höhe h_0 und die gesuchte Ausströmgeschwindigkeit v_1 bei der Höhe h_1. Desweiteren gilt:

$$p_0 = p_1 = p,$$

da der Außendruck gleichmäßig überall auf die Flüssigkeit wirkt.
Allgemein gilt:

$$p_0 + \frac{\rho}{2}v_0^2 + \rho g h_0 = p_1 + \frac{\rho}{2}v_1^2 + \rho g h_1$$

Mit Einsetzen der Randbedingungen ergibt sich:

$$\rho g h_0 = \frac{\rho}{2}v_1^2 + \rho g h_1$$

Daraus folgt für die gesuchte Ausströmgeschwindigkeit:

$$v_1 = \sqrt{2g(h_0 - h_1)} = 6.26m/s$$

b) In welcher Entfernung vom Fass trifft der Most auf den Boden, wenn das Fass auf einem Podest der Höhe 1m steht?

Lösungsvorschlag:
Die Fallhöhe ergibt sich aus

$$H = h + h_1 = 1.2m$$

Die Fallzeit beträgt einfach

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}} = 0.5s$$

Der zurückgelegte Weg ist dann:

$$s = v_1 \cdot t = 0.5s \cdot 6.26m/s = 3.1m$$

c) Der Winzer verschließt versehentlich den Gärstutzen, so dass sich ein Überdruck aufbaut. Als er nun den Hahn öffnet, spritzt der Most $6m$ durch den Keller. Wie hoch war der Überdruck als Differenzdruck zum Atmosphärendruck?

Lösungsvorschlag:
Die Fallzeit beträgt immer noch $t = 0,5s$. Da der Most $6m$ durch den Keller spritzt, ist nun die Ausströmgeschwindigkeit:

$$v_2 = \frac{s_2}{t} = 12m/s$$

Die Bernoulli-Gleichung muss nun den veränderten Druck in Betracht ziehen:

$$p_2 + \rho g h_0 = p_0 + \frac{\rho}{2}v_2^2 + \rho g h_1$$

p_2 ist gegeben durch $p_0 + \Delta p$. Daher wird obige Gleichung zu:

$$\Delta p = \frac{\rho}{2}v_2^2 + \rho g(h_1 - h_0) = 0.54bar$$

Aufgabe 3 *(Wärmeleitung)*

Draußen herrscht bei Hochdruckwetterlage (1013 hPa) eine winterliche Temperatur von $0°C$, während die Heizung die Zimmertemperatur bei $22°C$ einstellt. Das Zimmer hat drei Fenster mit einer Glasfläche von je $1\,\mathrm{m}^2$. Sie sind doppelt verglast aber mit sehr unterschiedlicher Technik: das altmodische Fenster hat einen Scheibenabstand von 10 cm und der Zwischenraum ist mit Luft gefüllt. Die moderneren Fenster haben einen Scheibenabstand von 1cm und im Zwischenraum befindet sich einmal Xenon und einmal Luft bei einem Druck von je $0,1\,\mathrm{mbar}$.

a) Berechnen sie den Energiefluss durch jedes der Fenster unter der Annahme, dass die jeweiligen Innenscheiben Raumtemperatur und die Außenscheiben 0°C haben.

b) Warum ist die Annahme aus Teilafgabe a)unrealistisch?

Berechnen Sie zunächst die mittlere freie Weglänge der Moleküle bei der Durchschnittstemperatur ($T = 285\mathrm{K}$). Nehmen Sie für den Wirkungsquerschnitt der Stöße näherungsweise die Querschnittsfläche des doppelten Radius der Moleküle an (für N2 einen Radius von $0,71\,\text{Å}$ und für Xe $1,77\,\text{Å}$). Nehmen sie der Einfachheit halber an, dass der Fensterrahmen keinen Einfluss auf die Wärmeleitung habe und die Luft ein ideales Gas sei, das lediglich aus Stickstoffmolekülen (N2) zusammengesetzt sei (N2 hat bei diesen Temperaturen 5 Freiheitsgrade: 3xTranslation und 2xRotation)

Lösungsvorschlag:

Es gibt zwei Arten der Wärmeleitung in Gasen, die von der freien Weglänge abhängt. Ist die freie Weglänge größer als der Abstand der Wärmequelle und der Wärmesenke gilt die druckabhängige Wärmeleitung ($\sharp$) Ist sie kleiner gilt die druckunabhängige Wärmeleitung($**$), die einen Temperaturgradienten im Gas erzeugt. $\Rightarrow$ Berechnung der freien Weglängen (bei einer Temperatur zwischen 0° und $22°C$ – also ca. 285K) in den Fensterscheiben für Stickstoff bei Normaldruck und bei 0,01mbar sowie für Xenon bei 0,01 bar:

a)

$$\Lambda = \frac{1}{\frac{N}{V}\sigma} \qquad \frac{N}{V} = \frac{P}{k_B T} \qquad -> \Lambda = \frac{1}{\frac{P}{k_B T}\sigma} \qquad (T \approx 285K)$$

$$\Lambda_{N_2}(1013\ mbar) = \frac{1}{2{,}57 \cdot 10^{25} m^{-3} \cdot 4\pi \cdot (7{,}12 \cdot 10^{-11} m)^2} = 610nm \qquad ^{**}\ \textit{viel kleiner als } 10cm$$

$$\Lambda_{N_2}(0{,}01\ mbar) = \frac{1}{2{,}57 \cdot 10^{20} m^{-3} \cdot 6{,}37^{-20} m^2} = 6{,}1cm \qquad \#\ \textit{größer } 1cm$$

$$\Lambda_{Xe}(0{,}01\ mbar) = \frac{1}{2{,}57 \cdot 10^{20} m^{-3} \cdot 3{,}9^{-19} m^2} = 0{,}99cm \qquad (\#?^{**})\ \textit{das ist schon recht knapp an } 1cm!$$

Fall # (Demtröder Formel 7.49a)

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{8} \cdot \frac{N}{V} \bar{v}\, k_B\, f\, (T_{innen} - T_{außen}) \qquad \bar{v} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi \cdot m}} = \sqrt{\frac{8PV}{\pi \cdot mN}}$$

$$\frac{dW}{dt} = \sqrt{\frac{P \cdot N}{8\pi V m}}\, k_B\, f\, (T_{innen} - T_{außen})$$

$$\frac{dW_{N_2}}{dt} = \sqrt{\frac{1N \cdot m^{-2} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{20} m^{-3}}{8\pi \cdot 2 \cdot 14 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} kg}}\ 1.38 \cdot 10^{-23}\ \frac{J}{K} \cdot 5 \cdot\ 22K =$$

$$= 1{,}46 \cdot 10^{-22} m^{-2} s^{-1} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 110J = 22{,}2Wm^{-2}$$

$$\frac{dW_{Xe}}{dt} = \sqrt{\frac{1N \cdot m^{-2} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{20} m^{-3}}{8\pi \cdot 131{,}3 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} kg}}\ 1.38 \cdot 10^{-23}\ \frac{J}{K} \cdot 3 \cdot\ 22K =$$

$$= 6{,}76 \cdot 10^{-21} m^{-2} s^{-1} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 66J = 6{,}16Wm^{-2}$$

für Normaldruck gilt: (Demtröder Formel 7.50)

$$\frac{dW}{dt} = \frac{f \cdot k_B}{12\sigma} \bar{v} \cdot \frac{dT}{dx} = \frac{f \cdot k_B}{12\sigma} \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

$$\frac{dW_{N_2}}{dt} = \frac{5 \cdot 1{,}38^{-23} JK^{-1}}{12 \cdot 6{,}37 \cdot 10^{-20} m^2} \sqrt{\frac{8 \cdot 1{,}38^{-23} JK^{-1} \cdot 285K}{\pi \cdot 2 \cdot 14 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} kg}}\ \frac{22K}{0{,}1m} =$$

$$= 9 \cdot 10^{-5} \cdot 464{,}3 \cdot 220 = 9{,}22Wm^{-2}$$

$$\frac{dW_{Xe}}{dt} = \frac{3 \cdot 1{,}38^{-23} JK^{-1}}{12 \cdot 3{,}9 \cdot 10^{-19} m^2} \sqrt{\frac{8 \cdot 1{,}38^{-23} JK^{-1} \cdot 285K}{\pi \cdot 131{,}3 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} kg}}\ \frac{22K}{0{,}01m} =$$

$$= 8{,}8 \cdot 10^{-6} \cdot 214{,}4 \cdot 2200 = 4{,}17Wm^{-2}$$

die Freiheitsgrade für Stickstoff sind 5 (3 Translation +2 fach entartete Rotation. Schwingungsmoden werden bei Raumtemperaturen noch nicht angeregt.) Beim einatomigen Gas Xenon gibt es nur die drei Freiheitsgrade der Translation. Da die freie Weglänge für Xenon auf der Grenze zum Scheibenabstand liegt wurden beide Formeln für die Energietransferdichten angesetzt. Der tatsächliche Wert liegt wohl zwischen den beiden Ergebnissen bei ca. $5{,}16Wm^{-2}$. Es isoliert also viermal so gut wie das evakuierte Stickstoffgasfenster und würde 20 mal so gut wie das altmodische Fenster isolieren. Allerdings ist der Scheibenabstand des altmodischen Fensters 10cm. Dadurch isoliert es auch nur doppelt so gut wie das altmodische Fenster (zumindest wenn man Konvektion und Undichtigkeiten für Zugluft vernachlässigt...).

b) In Realität ist die Innenscheibe natürlich kühler als die Zimmertemperatur und die Außenscheibe wärmer als die Außentemperatur (besonders im Falle des altmodischen Fensters!) Dieser verringerte Temperaturunterschied der Scheiben verbessert die Isoliereigenschaften der Fenster noch um etwa einen Faktor 2.

Aufgabe 4 *(innere Reibung)*

Wie lange braucht eine Kohlendioxid-Blase in einer Limonade um vom Boden eines Glases bis nach oben aufzusteigen? Gehen Sie davon aus, dass die Blase einen konstanten Durchmesser von 1 mm besitze. Die Limonade habe die Dichte $1,1 \cdot 10^3\ \frac{\text{kg}}{m^3}$ und eine Viskosität von $1,8$ mPa·s. Die Füllhöhe der Limonade im Glas betrage etwa 15 cm.
(Hinweis: Verwenden Sie das Stokes'sche Reibungsgesetz.)

Lösungsvorschlag:
Wir nehmen an, dass die Beschleunigungsphase der Blase vernachlässigbar kurz ist. Nach Erreichen der Endgeschwindigkeit gilt:

$$F_{\text{Auftrieb}} - m_{\text{Blase}}g - F_{\text{Reibung}} = 0$$

Mit der Masse der Gasblase $m_{\text{Blase}} = \rho_{\text{Gas}}V_{\text{Blase}}$ und der bekannten Formel für die Auftriebskraft ergibt sich:

$$\rho_{\text{Limonade}}V_{\text{Blase}}g - \rho_{\text{Gas}}V_{\text{Blase}}g - 6\pi\eta r_{\text{Blase}}v_{\text{Blase}} = 0$$

Aufgelöst nach der Endgeschwindigkeit v_{Blase} erhält man

$$v_{\text{Blase}} = \frac{V_{\text{Blase}}g(\rho_{\text{Limonade}} - \rho_{\text{Gas}})}{6\pi\eta r_{\text{Blase}}} \approx \frac{4\pi r^3_{\text{Blase}}g\rho_{\text{Limonade}}}{18\pi\eta r_{\text{Blase}}} = 0,3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Für die Höhe von 15 cm benötigt die Blase folglich die Zeit

$$t = \frac{h}{v_{\text{Blase}}} = 0,45\ \text{s}$$