Lösungen Aufgabenblatt 14

Übungen E1 – Mechanik WS 2017/2018

Dozent: Prof. Dr. Hermann Gaub
Übungsleitung: Dr. Martin Benoit und Dr. Res Jöhr

Verständnisfragen

i.) das ist der Bernoullieffekt für eine ideale Flüssigkeit: keine Reibung!

ii.) Für ideale Flüssigkeiten (ohne Reibung) gilt der Energieerhaltungssatz für jedes Volumenelement ΔV. Dividiert man die Summe aus Volumenarbeit, potentieller Energie und kinetischer Energie eines Volumenelements durch sein Volumen erhält man die Bernoulli'sche Gleichung: $p + \rho g z + \frac{\rho}{2}v^2 = \text{const}$
Qualitativ gilt für den Wasserstrahl

- im Punkt 1: kleine kin. Energie, keine pot. Energie und großer Druck
- im Punkt 2: große kin. Energie, kleine pot. Energie und kein Druck
- im Punkt 3: keine kin. Energie, große pot. Energie und kein Druck

iii.) Mit der Fläche A und dem Durchmesser d des Loches ist der Volumenstrom:
$I_V = Av = \pi r^2 v = \frac{1}{4}\pi d^2 v$
$\Rightarrow \quad v = \frac{I_V}{\frac{1}{4}\pi d^2} = \frac{12{,}5\,\frac{\text{cm}^3}{\text{s}}}{\frac{1}{4}\pi(1\text{cm})^2} = 15,92\frac{\text{cm}}{\text{s}}$

Aufgabe 1 *(Kontinuitätsgleichung)*

a) Gesamtfluss ϕ durch geschlossene Fläche = Abfluss - Zufluss
Quader: $\Delta\phi_1 = -\rho u_x(x)\Delta y\Delta z$
$\Delta\phi_2 = +\rho u_x(x+\Delta x)\Delta y\Delta z \approx \rho(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x}\Delta x)\Delta y\Delta z$
$\Rightarrow \quad \Delta\phi_1 + \Delta\phi_2 = \rho\frac{\partial u_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z = \rho\frac{\partial u_x}{\partial x}\Delta V$
Für die beiden anderen Flächen (begrenzt durch $\Delta x\Delta y$ und $\Delta x\Delta z$) gilt analoges. Damit ergibt sich insgesamt: $\Delta\phi = \rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\Delta V = \rho\,\text{div}(\vec{u})\Delta V$
Aus der Massenerhaltung folgt, dass der Gesamtfluss durch eine geschlossene Fläche gleich der Massenänderung im Volumen ist: $\Delta\phi = -\frac{\text{d}}{\text{d}t}\Delta M = -\frac{\text{d}}{\text{d}t}\rho\Delta V = -\frac{\partial\rho}{\partial t}\Delta V$
Setzt man die Flüsse gleich und dividiert durch ΔV erhält man
$\Rightarrow \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{u}) = 0$ (Kontinuitätsgleichung)

Ergänzung für die Tutoren:
Für ein beliebig geformtes Volumen gibt es eine ähnliche Herleitung. Das Volumen lässt sich dabei aus infinitesimalen Volumina dV zusammensetzen. Die (internen) Flüsse durch zwei sich berührende Quaderflächen benachbarter Quaderelemente gleichen sich aus und es bleibt nur der Fluss durch die Gesamtoberfläche. Es gilt dann analog zur obigen Betrachtung unter Verwendung des Satz von Gauß:
$\phi_{\text{ges}} = -\frac{\partial}{\partial\text{t}}\int\limits_V \rho\text{d}V \;\; \phi_{\text{ges}} = -\frac{\text{d}}{\text{dt}}M = \oint\limits_A \rho\vec{u}\cdot\text{d}\vec{A} = \int\limits_V \text{div}(\rho\vec{u})\text{d}V$

b) Nach Kontinuititätsgleichung gilt:
$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$
Für unseren Fall ist die Fläche einfach eine Kreisfläche:
$4 \cdot \pi \cdot r_A^2 \cdot v_A = N_K \cdot 4 \cdot \pi \cdot r_K^2 \cdot v_K$
Umstellen nach der gesuchten Kapillarenanzahl ergibt:
$N_K = \frac{r_A^2 \cdot v_A}{r_K^2 \cdot v_K} = \frac{(1.1cm)^2 \cdot 20\frac{cm}{s}}{(6\times10^{-4}cm)^2 \cdot 3\times10^{-2}\frac{cm}{s}} = 2240740740 = 224\,\text{Millionen}$

Aufgabe 2 *(Dynamischer Auftrieb)*

Der dynamische Auftrieb lässt sich mit Hilfe der Bernoulli Gleichung ausrechnen. Es gilt

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const.}$$

wobei v die Strömungsgeschwindigkeit, p der Druck des fließenden Mediums, ρ dessen Dichte, g die Schwerebeschleunigung und z die Höhe über einer Bezugsebene im Gravitationsfeld der Erde ist. Die Kraft, welche auf das Dach wirkt errechnet sich aus dem Druckunterschied (Druck im Haus und Druck über dem Dach) multipliziert mit der Fläche des Dachs. Es gilt also $F_a = \Delta pA$. Der Druckunterschied folgt aus der Bernoulli-Gleichung indem wir die Gleichung für die beiden Druckgebiete aufstellen und voneinander abziehen.

$$\frac{(v_1^2 - v_2^2)}{2} + \frac{p_1 - p_2}{\rho} = 0$$

Mit der Definition $\Delta p = p_2 - p_1 > 0$ (es gilt somit $v_1 > v_2$) sowie dass es im Haus windstill ist ($v_2 = 0$), folgt dann

$$\Delta p = \rho\frac{v_1^2 - v_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad F_a = \rho A\frac{v_1^2}{2}$$

Das Dach wird abgedeckt falls der dynamische Auftrieb größer ist als die Gewichtskraft.

$$F_a = \rho A\frac{v_1^2}{2} \geq mg = F_g$$

Umstellen nach v_1 gibt

$$v_1 \geq \sqrt{\frac{2mg}{\rho A}}$$

Was in unserem Falle ab $40.43\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ($145.54\,\mathrm{km\,s^{-1}}$) geschieht.

Aufgabe 3 *(U-Rohr)*

a) Die gesamte Wassermenge im U-Rohr wird durch die Gewichtskraft der Wassersäule, welche in einem Schenkel über dem Wasserniveau in dem anderen Schenkel steht, beschleunigt.
$M\ddot{h} = -\Delta mg$
$\Rightarrow \quad \rho AL\ddot{h} = -\rho A2hg$
$\Rightarrow \quad \ddot{h} = -\omega^2 h$ mit $\omega^2 = \frac{2g}{L}$

b) Allgemeine Lösung: $h = A\sin\omega t + B\cos\omega t$
$\Rightarrow \quad \dot{h} = \omega A\cos\omega t - \omega B\sin\omega t$
Anfangsbedingungen: $h(t=0) = a$ und $\dot{h}(t=0) = 0$.
$\dot{h}(t=0) = \omega A \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$
$h(t=0) = B \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad B = a$
$\Rightarrow \quad h(t) = a\cos\omega t$

c) $E_{\text{kin}} = \frac{M}{2}\dot{h}^2 = \frac{\rho AL}{2}(\omega a \sin\omega t)^2$
Beim Nulldurchgang ist die Geschwindigkeit maximal, also ist $|\sin\omega t| = 1$
$\Rightarrow \quad E_{\text{kin}}(h=0) = \frac{\rho AL}{2}\omega^2 a^2 = \rho A g a^2$

Aufgabe 4 *(Reynoldszahl)*

a) Walfisch: $v = 10\text{m/s}$, $\rho = 1000\text{kg/m}^3$, $L = 10\text{m}$, $\eta = 10^{-3}\text{Pa·s}$
$\Rightarrow \quad Re = 10^8 \quad \Rightarrow$ turbulent.

b) Bakterium: $v = 10^{-6}\text{m/s}$, $\rho = 1000\text{kg/m}^3$, $L = 10^{-6}\text{m}$, $\eta = 10^{-3}\text{Pa·s}$
$\Rightarrow \quad Re = 10^{-6} \quad \Rightarrow$ laminar.

c) Heißluftballon: $v = 0{,}01\text{m/s}$, $\rho = 1\text{kg/m}^3$, $L = 10\text{m}$, $\eta = 10^{-6}\text{Pa·s}$
$\Rightarrow \quad Re = 10^5 \quad \Rightarrow$ turbulent.

d) Regentropfen: $v = 1\text{m/s}$, $\rho = 1000\text{kg/m}^3$, $L = 1\text{mm}$, $\eta = 10^{-6}\text{Pa·s}$
$\Rightarrow \quad Re = 10^6 \quad \Rightarrow$ turbulent.

e) Gartenschlauch: Fluss ca. 10l pro 2min (Giesskannenfüllzeit). Bei einem Schlauchquerschnitt von 2cm entspricht dies etwa einer Flussgeschwindigkeit von ca. 0,2m/s also $v = 0{,}2\text{m/s}$, $\rho = 1000\text{kg/m}^3$, $D = 2 \cdot 10^{-2}\text{m}$, $\eta = 10^{-3}\text{Pa·s}$
$\Rightarrow \quad Re = 4000$
Dieser Fall liegt nahe beim kritischen Re Wert von 2300 für Rohre.

f) Isarkanal (Breite 5m, Tiefe 1m): $v = 1\text{m/s}$, $\rho = 1000\text{kg/m}^3$, $D = 1\text{m}$, $\eta = 10^{-3}\text{Pa·s}$
$\Rightarrow \quad Re = 10^6 \quad \Rightarrow$ turbulent.