Blatt 08: Phasenübergänge, Strahlung

Ausgabe: Freitag, 15.12.17; Abgabe: Montag, 08.01.17, 13:00 Uhr

Aufgabe 1 Dieterici Gas

(**5 Punkte**) Neben dem van der Waals-Gas gibt es noch weitere reale Gase, wie beispielsweise das Dieterici-Gas, welches durch die folgende Zustandsgleichung beschrieben wird:

$$P = \frac{N\, k_B\, T}{V - N\, b}\, e^{-\frac{a\, N}{V\, k_B\, T}},$$

wobei a und b konstanten sind.

Bestimmen Sie die kritischen Werte V_c, T_c und P_c!

Aufgabe 2 Ehrenfest-Gleichungen

(**6 Punkte**) In der Vorlesung haben Sie die Clausius-Clapeyron-Gleichung für Phasenübergänge erster Ordnung hergeleitet. Bei Phasenübergängen zweiter Ordnung fließt keine Wärme (d. h. die Entropie ist stetig), und das Volumen bleibt konstant. Leiten Sie das Pendant hierfür, die Ehrenfestgleichungen (in spezifischen Größen) für die Antwortfunktionen, her:

$$\Delta c_P = T\, \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T}\, \Delta \left(\left.\frac{\partial v}{\partial T}\right|_P \right), \tag{1}$$

$$\Delta \left(\left.\frac{\partial v}{\partial T}\right|_P \right) = -\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T}\, \Delta \left(\left.\frac{\partial v}{\partial P}\right|_T \right) \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T} = \frac{1}{v\, T}\, \frac{\Delta c_P}{\Delta \alpha} = \frac{\Delta \alpha}{\Delta \chi}, \tag{3}$$

wobei $\alpha = \frac{1}{v}\, \left.\frac{\partial v}{\partial T}\right|_P$, $\chi = -\frac{1}{v}\, \left.\frac{\partial v}{\partial P}\right|_T$ und $\Delta X = X_2 - X_1$ für beliebige Größen X in den beiden Phasen.

Aufgabe 3 Kohärentes und thermisches Licht

a) (**2 Punkt**) Ein Laser emittiert kohärentes Licht und damit in einem (hinreichend kleinen) Zeitintervall $\frac{t}{N}$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{w}{N}$ ein Photon und mit Wahrscheinlichkeit $1 - \frac{w}{N}$ kein Photon. Hierbei ist w proportional zur Strahlungsintensität. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Zeitraum t genau n Photonen emittiert werden? Berechnen Sie für den Limes $N \to \infty$ die Varianz $\left\langle (n - \langle n \rangle)^2 \right\rangle$ der Photonenzahl n als Funktion des Mittelwertes $\langle n \rangle$.

b) (**3 Punkte**) Die Photonenzahlverteilung der Hohlraumstrahlung folgt der Bose-Einstein-Statistik

$$P_\omega(n) = \frac{e^{-\beta\, \hbar\, \omega\, n}}{\sum_{n'=0}^{\infty} e^{-\beta\, \hbar\, \omega\, n'}}.$$

Schreiben Sie $P_\omega(n)$ als Funktion des Mittelwertes $\langle n \rangle$, d. h. eliminieren Sie $\beta\,\hbar\omega$. Achtung: $w \neq \omega$!

c) (**4 Punkte**) Die Photonenzahlvarianz thermischen Lichts einer einzelnen Mode ω ist größer als die kohärenten Lichts. Wir betrachten nun den typischen Fall, dass wir nicht eine einzelne Mode (also monochromatisches Licht) beobachten, sondern ein Frequenzintervall von M Moden. Nehmen Sie an, dass die Frequenzen nahe beiander liegen, sodass $\langle n_\omega \rangle \approx \nu$ modenunabhängig ist. Berechnen Sie die Varianz der Gesamtphotonenzahl $n_{\text{tot}} := \sum_{i=1}^{M} n_{\omega_i}$ als Funktion von $\langle n_{\text{tot}} \rangle$ und M! Interpretieren Sie den Grenzwert der Verteilung von n_{tot} für große M!