www.physik.uni-muenchen.de/lehre/vorlesungen/wise_17_18/T4_stat_mech/index.html

# Blatt 11: Sattelpunktapproximation

Ausgabe: Freitag, 19.01.18; Abgabe: Montag, 29.01.18, 13:00 Uhr

**Aufgabe 1** Sattelpunktapproximation und Stirlingformel

Wir erinnern uns zunächst an die *Sattelpunktapproximation*,

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^b dy\; e^{N\Phi(y)} = \lim_{N\to\infty} e^{N\Phi(y_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{N \left| \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi(y)\Big|_{y=y_0} \right|}}. \tag{1}$$

Dabei nimmt man an, dass die hinreichend glatte Funktion $\Phi(y)$ auf dem Intervall $(a,b)$ ein globales Maximum an der Stelle $y_0$ besitzt. Checken Sie Gleichung (1): Entwickeln Sie dazu $\Phi(y)$ bis zur zweiten Ordnung um $y_0$ und berechnen Sie das Integral.

(1.a) (**2 Punkte**) Die Stirlingformel war bei der Bearbeitung des letzten Übungsblatts hilfreich. Beweisen Sie die Stirlingformel (für $N \to \infty$)

$$N! \approx \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N} \tag{2}$$

mithilfe der *Sattelpunktapproximation*.

**Aufgabe 2** Ising Modell mit unendlich reichweitiger Wechselwirkung

Manchmal hilft uns die *Sattelpunktapproximation* bei der Auswertung von Zustandssummen! Wir betrachten nun ein Ising-Modell bestehend aus $N$ Spins (mit unendlich reichweitiger Wechselwirkung!), beschrieben durch den folgenden Hamiltonian

$$H = -\frac{\gamma}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sigma_i\sigma_j \tag{3}$$

mit $\sigma_k = \pm 1$ und $\gamma > 0$.

(2.a) (**3 Punkte**) Zeigen Sie, dass sich die kanonische Zustandssumme des Modells in folgender Form ausdrücken lässt

$$Z = \sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}\exp\left[\beta\frac{\gamma}{N}(N-2n)^2\right], \tag{4}$$

wobei $n$ die Anzahl der nach unten gerichteten Spins ($\sigma = -1$) bezeichnet.

(2.b) (**2 Punkte**) Um die *Sattelpunktapproximation* zu verwenden, bringen wir die Zustandssumme nun in eine geeignete Form. Zeigen Sie (ausgehend von Gleichung (4))

$$Z = \sqrt{\frac{N}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \; e^{N\Phi(y)}, \tag{5}$$

mit $\Phi(y) = \log\left[2\cosh\left[2\sqrt{x}y\right]\right] - y^2$ und $x = \gamma\beta$.

(2.c) (**1 Punkt**) Skizzieren Sie $\Phi(y)$ für verschiedene Temperaturen.

**Aufgabe 3** Phasenübergang im Ising Modell mit unendlich reichweitiger Wechselwirkung

Im thermodynamischen Limes ($N \to \infty$) weist das Ising-Modell aus Teilaufgabe 2 einen Phasenübergang bei einer endlichen Temperatur $T_c$ auf.

(3.a) (**2 Punkte**) Bestimmen Sie $T_c$.

(3.b) (**2 Punkte**) Diskutieren Sie den Erwartungswert $\left\langle \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sigma_i \sigma_j \right\rangle$ für Temperaturen ober- und unterhalb von $T_c$.

**Aufgabe 4** Quantenmechanische harmonische Oszillatoren

Wir betrachten ein System bestehend aus $N$ wechselwirkungsfreien quantenmechanischen harmonischen Oszillatoren. Der System-Hamiltonian lautet

$$H = \sum_{j=1}^{N} \hbar\omega_j \left( a_j^\dagger a_j + \frac{1}{2} \right). \tag{6}$$

Hierbei bezeichnet $\omega_j$ die Frequenz des $j$-ten Oszillators, die Operatoren $a_j$ und $a_j^\dagger$ bezeichnen die gewöhnlichen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren des $j$-ten Oszillators.

(4.a) (**2 Punkte**) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme $Z = \mathrm{tr}\left(e^{-\beta H}\right)$ des Systems. ($\mathrm{tr}\,(\bullet)$ ist die *Spur*-Operation.)

Wir betrachten nun Oszillatoren der gleichen Frequenz $\omega_j = \omega$.

(4.b) (**1 Punkte**) Vereinfachen Sie das Ergebnis aus (a) zu

$$Z = \left( 2\sinh\left(\frac{\beta\omega}{2}\right) \right)^{-N}.$$

(4.c) (**2 Punkte**) Berechnen Sie die "spezifische Wärme" $C$ des Systems,

$$C = \frac{\partial}{\partial(\beta^{-1})} \left( \frac{\mathrm{tr}\left(He^{-\beta H}\right)}{Z} \right) = \frac{\partial}{\partial(\beta^{-1})} \langle H \rangle \,.$$

(4.d) (**2 Punkte**) Diskutieren Sie den Wert von $C$ für "hohe" und "niedrige" Temperaturen, $\beta^{-1} \ll \omega$ und $\beta^{-1} \gg \omega$.