Lösungen zu Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Quadratische Gleichungen. Die allgemeine Lösungsstrategie ist hier die Gleichung auf die Form der „p-q-Formel" zu bringen, d.h. $x^2 + px + q = 0$; die Gleichung hat dann die Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Im allgemeinen haben quadratische Gleichungen zwei Lösungen, wobei die Lösungen komplexe Zahlen sein können. Wir beschäffigen uns aber meistens mit dem Fall, dass die Lösungen reelle Zahlen sind. Die Lösungen können auch zusammenfallen, in diesem Fall ist $x_1 = x_2$.

a) $x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow$ Einsetzten in die p-q-Formel:
$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{9} \Rightarrow x_1 = -5$ und $x_2 = +1$

b) $-x^2 + 10x + 25 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 5 \pm 5\sqrt{2}$

c) $2x^2 - 12x - 14 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x - 7 \Rightarrow x_1 = -1$ und $x_2 = 7$

Aufgabe 2

Kurvendiskussion.

a) Nullstellen $f(x) = 3 \cdot \left(e^{2x_0} - 1\right) = 0$, wobei e^{2x} keine Nullstelle besitzt.
$\Rightarrow \left(e^{2x_0} - 1\right) = 0 \quad \Rightarrow e^{2x_0} = 1 \quad \Rightarrow x_0 = 0$

b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3$
Für positive Werte für x dominiert die Exponentialfunktion. Für negative Werte für x wird die Exponentialfunktion klein und der -1 Term dominiert.

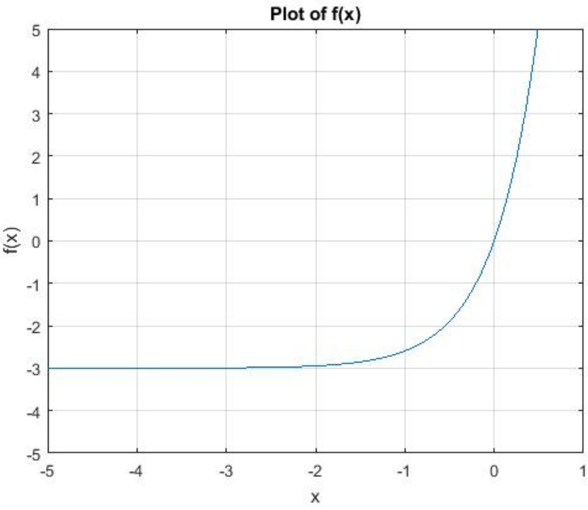
c) Zur Bestimmung von Extremwerten müssen wir die erste Ableitung $f'(x)$ ausrechnen und Null setzen: $f'(x) = 6 \cdot e^{2x} = 0 \quad \Rightarrow$ keine Extremwerte für endliche x.

Allgemein:
Für Maximum gilt: $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$
Für Minimum gilt: $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$

d) Streng monoton steigend $f'(x) > 0$
Streng monoton fallend $f'(x) < 0$

Aus der Teilaufgabe zuvor wissen wir, dass $f'(x) = 3e^{2x} > 0$ und die Funktion somit streng monoton steigend ist, für alle x.

e) Skizze der Funktion $f(x)$:

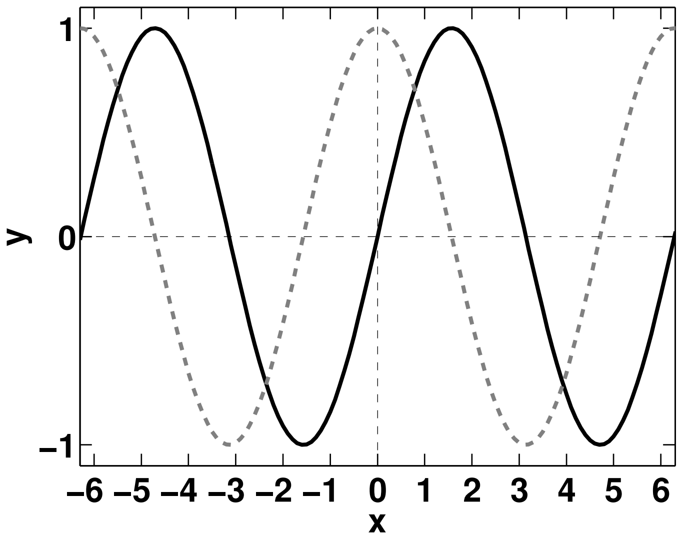


Randbemerkung: Die angegebene Funktion $f(x)$ hat die gleiche funktionelle Form wie die Shockley-Gleichung für den Strom durch eine Diode als Funktion der Spannung. Diese Gleichung wird uns, zumindest qualitativ im zweiten Semester begegnen.

Aufgabe 3

Trigonometrische Funktionen (Winkelfunktionen) I.

a) $\sin(x)$ (schwarze, durchgezogene Linie) und $\cos(x)$ (graue, gestrichelte Linie):



b) $\sin(x)$: Nullstellen bei $n\pi$, Maxima bei $(4n+1)\frac{\pi}{2}$, Minima bei $(4n+3)\frac{\pi}{2}$.
$\cos(x)$: Nullstellen bei $(2n+1)\frac{\pi}{2}$, Maxima bei $2\pi n$, Minima bei $(2n+1)\pi$.
wobei n aus den ganzen Zahlen ist, d.h. $n = ... - 2, -1, 0, 1, 2, ...$

c)

$$\sin\alpha = \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}); \quad \cos\alpha = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$$

d) Erste und zweite Ableitung der Funktion $f(x) = 2\cos(3x+2)$:

$$f'(x) = -6\sin(3x+2); \quad f''(x) = -18\cos(3x+2)$$

Aufgabe 4

Trigonometrische Funktionen (Winkelfunktionen) II.

a) Umrechnung von Grad- und im Bogenmaß:
Grad = Bogenmaß $\cdot 180°/\pi$
Bogenmaß = Grad $\cdot \pi/180°$
1 rad $\approx$ 57,29°; 2π rad = 360°.
$\theta_1 = 30° \approx$ 0,53 rad
$\theta_2 = 1° \approx$ 0,018 rad
$\theta_3 = 0.1° \approx$ 0,0018 rad

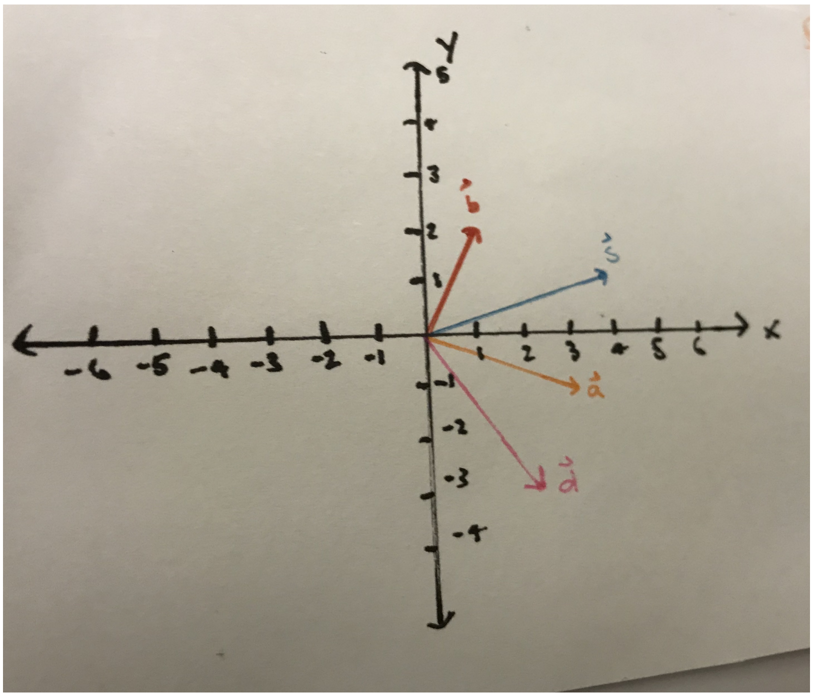
b) Kleinwinkelnäherung: Definiere den relativen Fehler $r = |\frac{\tan(\theta)-\theta}{\theta}|$
Für $\theta_1 : \tan(\theta_1) =$ 0,58 und $r_1 = 0,105$ oder 10,5%
Für $\theta_2 : \tan(\theta_2) =$ 0,0175 und $r_2 = 1 \cdot 10^{-4}$ oder 0,01%
Für $\theta_3 : \tan(\theta_3) =$ 0,00175 und $r_3 = 1 \cdot 10^{-6}$ oder 0,0001%
Man beachte, dass die Näherung um so besser ist, je kleiner der Winkel!

c)

$$\sin\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \sin\alpha = 1 \text{ m} \cdot \sin(20°) \approx 0,34 \text{ m}$$
$$\cos\alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot \cos\alpha = 1 \text{ m} \cdot \cos(20°) \approx 0,94 \text{ m}$$

Aufgabe 5

a) Einzeichnen in ein Koordinatensystem:



b) Summe und Differenz:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ (-1)+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ (-1)-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

c) Multipliktation mit einem Skalar:

$$\lambda_1 \cdot \vec{a} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 \cdot \vec{b} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

d) Betrag von $\vec{a}$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i)^2} = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

e) Skalarprodukt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = (3) \cdot 1 + (-1) \cdot (2) = (3) + (-2) = 1$$

Es gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ entweder falls einer der beiden Vektoren oder beide Vektoren $\vec{0} = \binom{0}{0}$ sind (triviale Lösung) oder falls die beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen (dieser Zusammenhang ist bei der Lösung vieler physikalischer Probleme wichtig)!